Sommaire

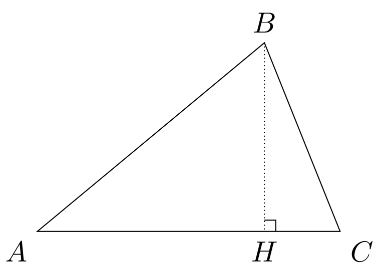
Chapitre . Produit scalaire

Dans tout le chapitre, on travaille dans le plan, noté P et on le munit d'une unité de distance.

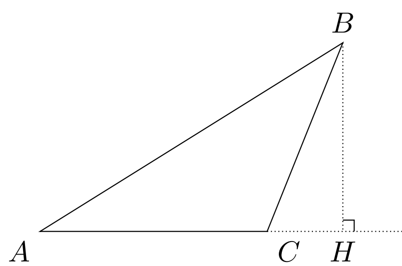
1 Présentation

1.1 Un certain défaut de rectangularité d'un triangle

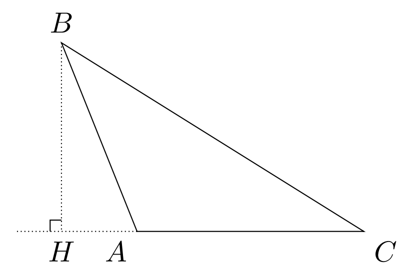
Soit ABC un triangle rectangle en A.
D'après le théorème de Pythagore, ceci est équivalent à $AB^2+AC^2 = BC^2$ ou encore à $AB^2+AC^2-BC^2 = 0$.
Soit ABC un triangle *qui n'est pas rectangle en* A. On considère la différence $\Delta = AB^2 + AC^2 - BC^2$.
ABC n'est pas rectangle en A est équivalent à $\Delta \neq 0$.
Δ est parfois appelée *défaut de rectangularité du triangle (non rectangle)* ABC.
Soit H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC) (H est aussi le pied de la hauteur issue de B dans ABC). Suivant la position relative de H par rapport à A et C sur (AC), il y a trois cas de figures à envisager :



1



2



3

On veut exprimer $\Delta = AB^2 + AC^2 - BC^2$ *en fonction des distances* AC *et* AH.

1.1.1 Établir les relations $BC^2 = HC^2 + HB^2$ puis $AB^2 = HA^2 + HB^2$.
En déduire une expression de Δ.

1.1.2 Cas 1 : en écrivant $HC = AC - AH$, donner une autre expression de Δ.

1.1.3 Cas 2 : en écrivant $HC = AH - AC$, donner une autre expression de Δ.

1.1.4 Cas 3 : en écrivant $HC = AC + AH$, donner une autre expression de Δ.

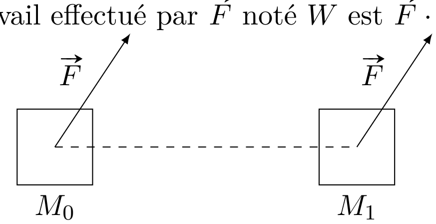
1.1.5 En condensant les trois cas en deux, exprimer $AC \times AH$.

Le réel $AC \times AH$ ou $-AC \times AH$ où H est le projeté orthogonal de B sur (AC) est appelé *produit scalaire* de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et noté $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

1.2 En sciences physiques, le travail d'une force

On dit qu'*une force appliquée à un objet effectue un travail* lorsque son point d'application se déplace. En notant $\overrightarrow{F}$ cette force, M_0 puis M_1 deux points d'application successifs de $\overrightarrow{F}$,

le travail effectué par $\overrightarrow{F}$ noté W est $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{M_0M_1}$



Pour tirer sur 10 m un chariot à roulettes, un homme exerce une force d'intensité 350 N selon un angle de 45°.

1.2.1 Quel est le travail effectué par la force $\vec{F}$?

1.2.2 Quelle est l'intensité de la force que l'homme aurait dû exercer pour effectuer le même travail en poussant le chariot dans l'axe de son déplacement ?

2 Définitions et premières propriétés

2.1 Projeté orthogonal d'un point sur une droite

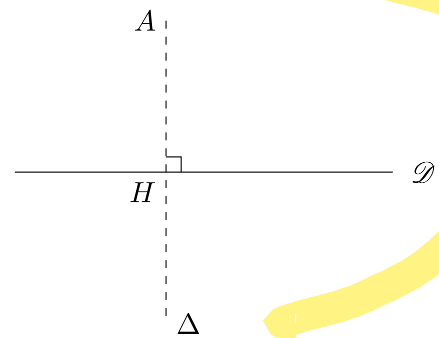
2.1.1 Définition

Soit $\mathscr{D}$ une droite. Soit A un point. On appelle *projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$*

le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de la perpendiculaire Δ à $\mathscr{D}$ passant par A

On le note parfois $p_{\perp}A$.

Sur la figure ci-contre, le point H est le projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathscr{D}$.



2.1.2 Remarques

Soient A un point, $\mathscr{D}$ une droite et H le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$.

2.1.2.1 Si $A \in \mathscr{D}$ alors $H = A$.

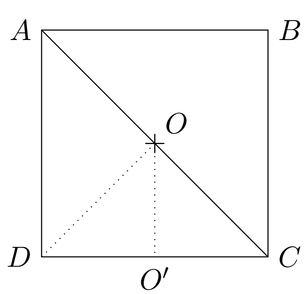
2.1.2.2 Si $A \notin \mathscr{D}$ alors $H \neq A$. Précisément, dans ce cas, H est le point tel que $\left\{\begin{array}{c} H \in \mathscr{D} \\ \text{et} \\ (AH) \perp \mathscr{D} \end{array}\right.$

2.1.3 Exemples

2.1.3.1 Dans les conditions de la définition, le projeté orthogonal d'un point quelconque de Δ sur $\mathscr{D}$ est le point H et le projeté orthogonal d'un point quelconque de $\mathscr{D}$ sur Δ est le point H.

2.1.3.2 Soit ABC un triangle rectangle en A. Alors le projeté orthogonal de C sur (AB) est A et le projeté orthogonal de B sur (AC) est A.

2.1.3.3 Soit $ABCD$ un carré de centre O.



- Le projeté orthogonal de D sur (BC) est C car, $ABCD$ étant un carré, $(DC) \perp (BC)$.
- Puisque $ABCD$ est un carré, les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires en O. Cela signifie que $(DO) \perp (AC)$ et que $O \in (AC)$. On en déduit que le projeté orthogonal de D sur (AC) est O.

— On considère le triangle ACD. La parallèle au côté $[A,\, D]$ passant par O coupe le côté $[D,\, C]$ en O'. Puisque O est le centre de $ABCD$, O est le milieu de $[A,\, C]$. D'après le théorème des milieux, O' est le milieu de $[D,\, C]$ et donc $O' \in (DC)$.
Comme $(OO') /\!/ (AD)$ et $(AD) \perp (DC)$, on a $(OO') \perp (DC)$.
Puisque $O' \in (DC)$ et que $(OO') \perp (DC)$, O' est le projeté orthogonal de O sur (DC).

2.2 Théorème et définition : produit scalaire de deux vecteurs

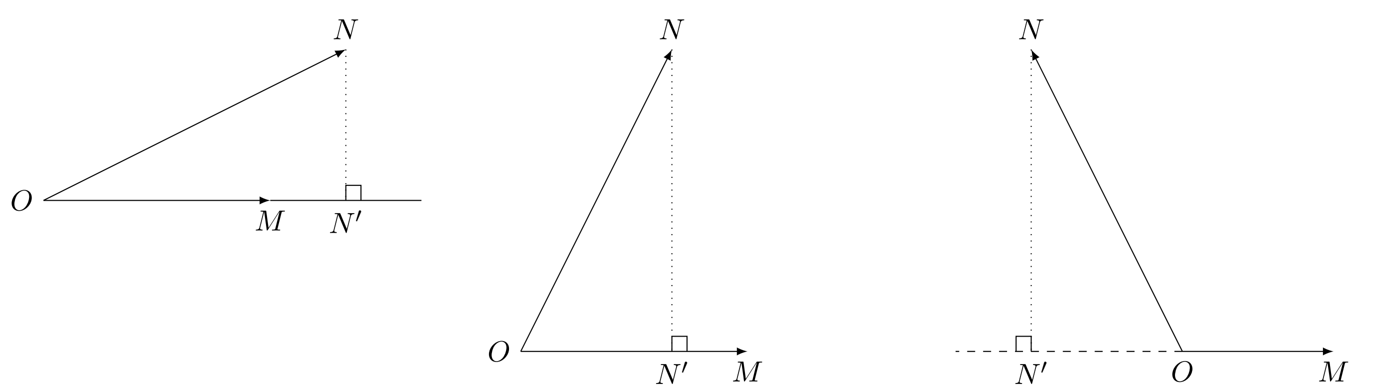
— Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs *non nuls*. Soit O un point. Soient M et N les points tels que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$.
Soit N' le projeté orthogonal de N sur (OM).
Alors le réel $OM \times ON'$ (et donc aussi $-OM \times ON'$) est indépendant de O.

— Soient maintenant deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ quelconques. On appelle *produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$* le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tel que

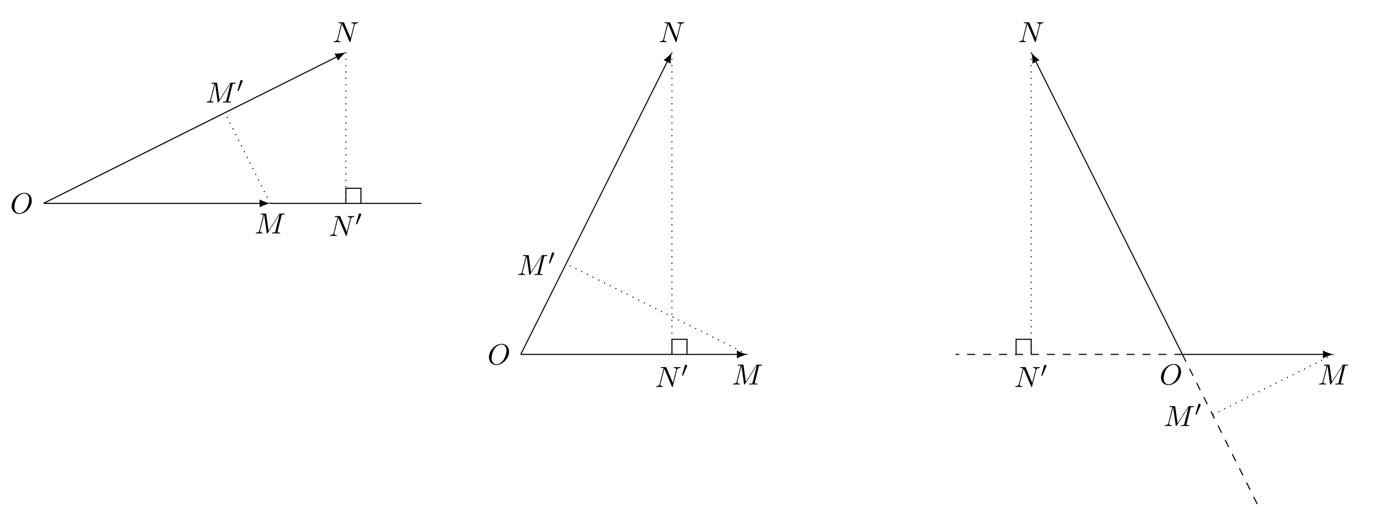
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} OM \times ON' & \text{si } \overrightarrow{OM} \text{ et } \overrightarrow{ON'} \text{ sont de même sens} \\ -OM \times ON' & \text{si } \overrightarrow{OM} \text{ et } \overrightarrow{ON'} \text{ sont de sens contraires} \end{array}\right\} & \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 \hspace{12em} \} & \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

Démonstration. Ce théorème est admis. ■

2.3 Figures pour 2.2



2.4 Figures pour 2.5



2.5 Théorème : autre façon de calculer un produit scalaire

Dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas tous les deux nuls, le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'obtient aussi en considérant le projeté M' de M sur (ON).

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{cases} OM' \times ON & \text{si } \overrightarrow{ON} \text{ et } \overrightarrow{OM'} \text{ sont de même sens} \\ -OM' \times ON & \text{si } \overrightarrow{ON} \text{ et } \overrightarrow{OM'} \text{ sont de sens contraires} \end{cases}$$

Démonstration

— Lorsque $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON'}$ sont colinéaires et de même sens, il en est de même de $\overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{OM'}$.
Dans le triangle ONN' rectangle en N', on a $\cos\widehat{O} = \frac{ON'}{ON}$.
Dans le triangle OMM' rectangle en M', on a $\cos\widehat{O} = \frac{OM'}{OM}$.
Donc $\frac{ON'}{ON} = \frac{OM'}{OM}$ puis $ON' \times OM = ON \times OM'$.

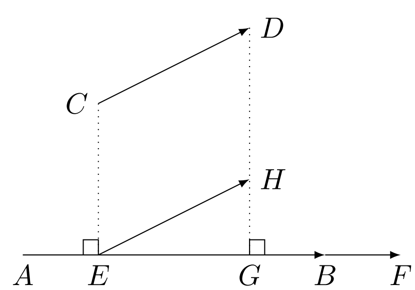
— Lorsque $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON'}$ sont colinéaires et de sens contraires, il en est de même de $\overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{OM'}$.
Le secteur (MON) est obtus.
Donc, dans le triangle ONN', on a $\cos\left(\widehat{MON}\right) = -\frac{ON'}{ON}$.
Puis, dans le triangle OMM', on a $\cos\left(\widehat{MON}\right) = -\frac{OM'}{OM}$.
Donc $-\frac{ON'}{ON} = -\frac{OM'}{OM}$ puis $-ON' \times OM = -ON \times OM'$. ■

2.6 Théorème : autre façon de calculer un produit scalaire

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs non nuls. Soient E le projeté orthogonal de C sur (AB) et G le projeté orthogonal de D sur (AB).

Alors

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \begin{cases} AB \times EG \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{EG} \text{ sont de même sens} \\ -AB \times EG \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{EG} \text{ sont de sens contraires} \end{cases}$$



Démonstration dans le cas où $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont de même sens.

Soient F le point de (AB) tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ et H le point tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EH}$.

Puisque $(CE) \perp (AB)$ et que $(DG) \perp (AB)$, on a $(CE)//(DG)$. (DG) est donc la parallèle à (CE) passant par D.

Puisque $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EH}$, on a $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DH}$ ce qui entraîne $(CE)//(DH)$. (DH) est donc la parallèle à (CE) passant par D.

On en déduit que $(DH) = (DG)$ puis que D, G et H sont alignés et enfin, G est le projeté orthogonal de H sur (AB).

$$\begin{array}{rcl|l} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} & = & \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EH} & \text{car } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF} \text{ et } \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EH} \\ & = & EF \times EG & \text{car } G \text{ est le projeté orthogonal de } H \text{ sur } (AB) \\ & = & AB \times EG & \text{car } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF} \text{ entraîne } AB = EF \end{array}$$

La démonstration est analogue dans le cas où $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont de sens contraires. ■

2.7 Remarques

2.7.1 Le théorème 2.6 permet de calculer le produit scalaire de deux vecteurs *en projetant le vecteur* $\overrightarrow{CD}$ *sur la droite* (AB) ce que font assez souvent les physiciens. Pour ce calcul, on n'est donc pas obligé de se ramener systématiquement à deux vecteurs comportant le même premier point dans leur libellé.

2.7.2 On obtient un résultat analogue en projetant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur la droite (CD).

2.8 Définition : produit scalaire

L'application

$$\begin{array}{ccc} \vec{P} \times \vec{P} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \longmapsto & \vec{u} \cdot \vec{v} \end{array}$$

est appelée *produit scalaire*.

Lorsque M est égal à N, le projeté orthogonal de N sur (OM) n'est autre que M et à ce moment-là, $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM} = OM \times OM = OM^2$.

$$O \longrightarrow M = M'$$

D'où la définition suivante.

2.9 Définition : carré scalaire d'un vecteur

Soit $\vec{u}$ un vecteur. On appelle *carré scalaire de* $\vec{u}$ le réel noté $\vec{u}^2$ tel que

$$\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$$

2.10 Mini-exercices

2.10.1 Soient A et B deux points. Quelle différence y a-t-il entre $\overrightarrow{AB}^2$ et $\overrightarrow{BA}^2$?

2.10.2 Calculer le produit scalaire de deux vecteurs qui sont colinéaires et de même sens ou alors colinéaires et de sens contraires.

2.11 Propriétés du carré scalaire

Soit $\vec{u}$ un vecteur. Alors

- $\vec{u}^2 \geqslant 0$.
- $(\vec{u} \neq 0) \Leftrightarrow (\vec{u}^2 > 0)$.
- $(\vec{u} = 0) \Leftrightarrow (\vec{u}^2 = 0)$.

2.12 Définitions : norme euclidienne d'un vecteur, vecteur unitaire

Soit $\vec{u}$ un vecteur. On appelle *norme euclidienne de* $\vec{u}$ le réel noté $\|\vec{u}\|$ tel que

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$$

On appelle *vecteur unitaire*, tout vecteur dont la norme est égale à 1.

2.13 Égalités entre carrés

Soient A et B deux points. Alors

$$\underbrace{\|\overrightarrow{AB}\|^2}_{\text{carré de la norme euclidienne}} = \underbrace{\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}^2}_{\text{définition de la norme euclidienne}} = \underbrace{\overrightarrow{AB}^2}_{\text{carré scalaire}} = \underbrace{AB^2}_{\text{carré de la distance}}$$

2.14 Produit scalaire et orthogonalité

2.14.1 Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On dit que *$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux* et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$ si l'un au moins des deux est nul ou bien si les droites qu'ils dirigent sont perpendiculaires.

2.14.2 D'après la définition du produit scalaire, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul alors leur produit scalaire est nul et réciproquement.

2.14.3 Soient maintenant deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui ne sont pas tous les deux nuls.
Soient toujours O un point quelconque, $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$ comme dans la sous-section 2.2. Les propositions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{array}{rcl|l}
\vec{u} \cdot \vec{v} & = & 0 & \\
\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} & = & 0 & \\
OM \times ON' = 0 & \text{ou} & -OM \times ON' = 0 & \\
OM \times ON' & = & 0 & \\
OM = 0 & \text{ou} & ON' = 0 & \\
ON' & = & 0 & \text{car, } \vec{u} \text{ n'étant pas nul, } O \neq M \\
O & = & N' & \text{et donc } OM \neq 0 \\
\multicolumn{3}{c|}{(OM) \perp (ON)} &
\end{array}$$

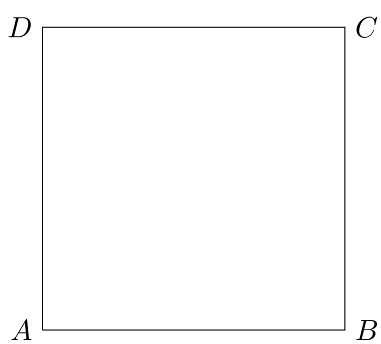
2.14.4 Les sous-sous-sections **2.14.2** et **2.14.3** contiennent la démonstration du

Théorème
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Alors

$$(\vec{u} \perp \vec{v}) \Leftrightarrow (\vec{u} \cdot \vec{v} = 0)$$

2.15 Exercice

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $AB = 4$.
Calculer les produits scalaires suivants :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AD}$.



3 Autres expressions du produit scalaire. Propriétés

3.1 Théorème : expression du produit scalaire à l'aide d'un cosinus

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs *non nuls*. Soit O un point du plan. Soient M et N les points tels que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$. Alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = OM \times ON \times \cos\left(\widehat{MON}\right)$$

Démonstration

— Si $\widehat{MON}$ est aigu alors $\cos\left(\widehat{MON}\right) > 0$ et $\cos\left(\widehat{MON}\right) = \frac{ON'}{ON}$.

Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = OM \times ON' = OM \times ON \times \cos\left(\widehat{MON}\right)$.

— Si $\widehat{MON}$ est droit alors $\cos\left(\widehat{MON}\right) = 0$.

Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 = OM \times ON \times \cos\left(\widehat{MON}\right)$.

— Si $\widehat{MON}$ est obtus alors $\cos\left(\widehat{MON}\right) < 0$ et $\cos\left(\widehat{MON}\right) = -\frac{ON'}{ON}$.

Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -OM \times ON' = OM \times (-ON') = OM \times ON \times \cos\left(\widehat{MON}\right)$.

— Si $\widehat{MON}$ est nul alors, N' désignant toujours le projeté orthogonal de N sur (OM), on a $N' = N$ et N' appartient à la demi-droite d'origine O contenant M.

Donc $\cos\left(\widehat{MON}\right) > 0$ et $\cos\left(\widehat{MON}\right) = \frac{ON}{ON} = 1$.

Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = OM \times ON' = OM \times ON = OM \times ON \times 1 = OM \times ON \times \cos\left(\widehat{MON}\right)$.

— Si $\widehat{MON}$ est plat alors $N' = N$ et N' appartient à la demi-droite d'origine O ne contenant pas M. ,Donc $\cos\left(\widehat{MON}\right) < 0$ et $\cos\left(\widehat{MON}\right) = -\frac{ON}{ON} = -1$.

Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -OM \times ON' = -OM \times ON = OM \times ON \times (-1) = OM \times ON \times \cos\left(\widehat{MON}\right)$.■

3.2 Exercice

Soient ABC un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 2\sqrt{2}$ et mes $\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{3\pi}{4}$ et B' le projeté orthogonal de B sur (AC).

3.2.1 Faire une figure.

3.2.2 En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$ de deux façons différentes, calculer AB'.

3.3 Théorème : propriétés du produit scalaire

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs. Soient λ un réel.
Alors le produit scalaire est

— *symétrique* :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

— *bilinéaire* c'est-à-dire

linéaire par rapport à la première variable :

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

et *linéaire par rapport à la deuxième variable* :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Démonstration
Ce théorème est admis. ■

3.4 Mini-exercices corrigés

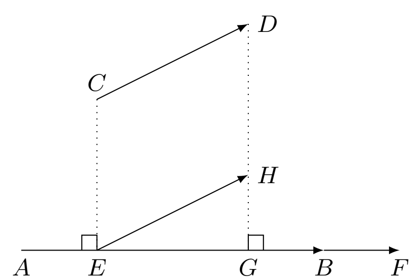
3.4.1 Grâce à l'une de ces propriétés, retrouver l'égalité de la définition du produit scalaire.

3.4.2 Grâce à deux de ces propriétés, retrouver l'égalité $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times EG$ de la sous-section 2.6.

RÉPONSES

3.4.1 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC}$.
Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ puisque, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HC}$ étant orthogonaux, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$.

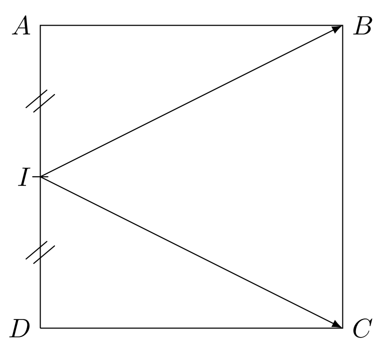
3.4.2
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED}) \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED} \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED} && \text{car } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CE} \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GD}) \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GD} \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} && \text{car } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{GD} \\
&= \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} && \text{car } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF} \\
&= EF \times EG \\
&= AB \times EG && \text{car } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF} \text{ entraîne } AB = EF
\end{aligned}$$



3.5 Exercices

3.5.1 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u}^2 = 8$, $\vec{v}^2 = 1$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$. Calculer $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v})$.

3.5.2 Soient a un réel strictement positif, $ABCD$ un carré de coté a et I le milieu de $[A, D]$.



3.5.2.1 Calculer $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC}$ en fonction de a.

3.5.2.2 Calculer IC en fonction de a.

3.5.2.3 Soit H le projeté orthogonal de B sur la droite (IC). En calculant $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC}$ d'une autre manière qu'à la première question, calculer IH en fonction de a.

3.5.3 Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles de même centre O et de rayons respectifs r et r' tels que $r' > r$. Soient A un point de $\mathscr{C}$ et B un point de $\mathscr{C}'$ tels que O, A et B sont alignés dans cet ordre. Soient C un point de $\mathscr{C}$ et D un point de $\mathscr{C}'$ tels que O, C et D sont alignés dans cet ordre. Les droites (OD) et (OB) sont perpendiculaires.

Démontrer que la médiane issue de O dans le triangle OAD est la hauteur issue de O dans le triangle OBC.

3.6 Définition : repère orthonormé

Soit $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ un repère. On dit que $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ *est un repère orthonormé* si

$$\vec{\imath} \perp \vec{\jmath},\ \|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$$

3.7 Théorème : expression du produit scalaire dans un repère orthonormé

Soit $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ un repère orthonormé. Soient $\vec{u}(x,\ y)$ et $\vec{v}(x',\ y')$ deux vecteurs.
Alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Démonstration

$$\begin{array}{rcl|l} \vec{u} \cdot \vec{v} & = & (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) \cdot (x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}) & \\ & = & (x\vec{\imath}) \cdot (x'\vec{\imath}) + (x\vec{\imath}) \cdot (y'\vec{\jmath}) + (y\vec{\jmath}) \cdot (x'\vec{\imath}) + (y\vec{\jmath}) \cdot (y'\vec{\jmath}) & \\ & = & xx'\vec{\imath}^2 + xy'\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} + yx'\vec{\jmath} \cdot \vec{\imath} + yy'\vec{\jmath}^2 & \\ & = & xx' + yy' & \text{car } \vec{\imath}^2 = 1,\ \vec{\jmath}^2 = 1 \text{ et } \vec{\imath} \perp \vec{\jmath} \\ & & & \text{ce qui entraine que} \\ & & & \vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = \vec{\jmath} \cdot \vec{\imath} = 0 \ \blacksquare \end{array}$$

3.8 Conséquences

3.8.1 Soit $M(x,\ y)$ un point. Alors

$$x = \vec{\imath} \cdot \overrightarrow{OM} \text{ et } y = \vec{\jmath} \cdot \overrightarrow{OM}$$

En effet $\vec{\imath} \cdot \overrightarrow{OM} = 1 \times x + 0 \times y = x$ et $\vec{\jmath} \cdot \overrightarrow{OM} = 0 \times x + 1 \times y = y$.

Ainsi, dans un repère orthonormé $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, pour démontrer une égalité du type $\vec{a} = \vec{b}$, il suffit de démontrer que $\vec{\imath} \cdot \vec{a} = \vec{\imath} \cdot \vec{b}$ et que $\vec{\jmath} \cdot \vec{a} = \vec{\jmath} \cdot \vec{b}$ puisque la décomposition d'un vecteur dans une base est unique.

3.8.2 Soient $M(x,\ y)$ et $N(x',\ y')$ deux points distincts de O. Alors

$$\cos\left(\widehat{MON}\right) = \frac{xx' + yy'}{OM \times ON}$$

3.8.3 Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs. Alors

$$(\vec{u} \perp \vec{v}) \Leftrightarrow (xx' + yy' = 0)$$

3.8.4 Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs. Alors

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

3.9 Exercice corrigé

3.9.1 Redémontrer la formule vue dans le cours de trigonométrie :

$$\text{pour tous les réels } a \text{ et } b,\ \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

en calculant, dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}(\cos a,\ \sin a)$ et $\vec{v}(\cos b,\ \sin b)$ de deux façons différentes.

3.9.2 En déduire les formules donnant $\cos(a + b)$, $\cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right)$ et enfin $\sin(a - b)$.

RÉPONSE

3.9.1 Soit $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ un repère orthonormé.
Soient a et b deux réels que l'on suppose tels que $b \geqslant a$.
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs de composantes respectives $(\cos a,\ \sin a)$ et $(\cos b,\ \sin b)$ dans $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
D'une part, $\|\vec{u}\| = \sqrt{\cos^2 a + \sin^2 a} = \sqrt{1} = 1$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{\cos^2 b + \sin^2 b} = \sqrt{1} = 1$ et, avec $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$, $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$, $\cos\left(\widehat{MON}\right) = \cos(b-a)$.
Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(b-a) = 1 \times 1 \times \cos(b-a) = \cos(b-a)$.
D'autre part, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
On en déduit que $\cos(b-a) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
Comme cos est paire, $\cos(b-a) = \cos(a-b)$ et donc $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
Maintenant, si $a \geqslant b$, alors $\cos(a-b) = \cos b \cos a + \sin b \sin a$ d'après ce qui précède ce qui donne aussi
$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

3.9.2

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos(a-(-b)) \\
&= \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) \text{ en appliquant la formule du } \mathbf{3.9.1} \text{ à } a \text{ et } -b \\
&= \cos a \cos b - \sin a \sin b \text{ car la fonction } \cos \text{ est paire et la fonction sinus } \sin \text{ est impaire}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) &= \cos a \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin a \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ en appliquant la formule du } \mathbf{3.9.1} \text{ à } a \text{ et } -\frac{\pi}{2} \\
&= \sin a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(a - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \text{ en appliquant la formule précédente à } a - \frac{\pi}{2},\text{ de droite à gauche} \\
&= \cos(a-\pi) \\
&= -\cos a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(a + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \text{ en appliquant la formule « deux fois précédente » à } a + \frac{\pi}{2},\text{ de droite à gauche} \\
&= \cos a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(a + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \text{ en appliquant la formule précédente à } a + \frac{\pi}{2},\text{ de droite à gauche} \\
&= \sin(a+\pi) \\
&= -\sin a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(a-b) &= \cos\left(a - b - \frac{\pi}{2}\right) \text{ en appliquant la formule « quatre fois précédente » à } a-b,\text{ de droite à gauche} \\
&= \cos\left(a - \left(b + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= \cos a \cos\left(b + \frac{\pi}{2}\right) + \sin a \sin\left(b + \frac{\pi}{2}\right) \text{ en appliquant la formule du } \mathbf{3.9.1} \text{ à } a \text{ et } b + \frac{\pi}{2} \\
&= \cos a(-\sin b) + \sin a \cos b \text{ d'après la formule précédente puis celle « deux fois précédente »} \\
&= \sin a \cos b - \cos a \sin b \text{ car la fonction } \sin \text{ est impaire}
\end{aligned}$$

3.10 Exercice

Soit $(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ un repère orthonormé. Soient $A(4,\ 1)$, $B(0,\ 5)$ et $C(-2,\ -1)$.

3.10.1 Calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

3.10.2 Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

3.10.3 Déterminer la mesure des secteurs $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$.

3.10.4 Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC). Calculer les distances AH et CH.

3.11 Théorème : produits scalaires remarquables

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Alors

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 \qquad \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 \qquad (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

Démonstration

$$\begin{aligned}(\vec{u}+\vec{v})^2 &= (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})\\ &= \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v}\\ &= \vec{u}^2 + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2\\ &= \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) &= \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot(-\vec{v}) + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot(-\vec{v})\\ &= \vec{u}^2 - \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{v}^2\\ &= \vec{u}^2 - \vec{v}^2 \ \blacksquare\end{aligned}$$

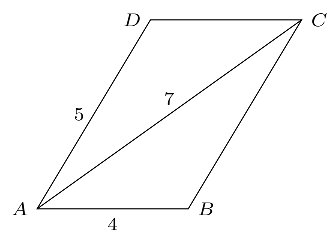
3.12 Exercices pas mini

3.12.1 Utiliser l'une des formules précédentes pour répondre d'une autre manière à la première question de l'exercice **3.5.2**.

3.12.2 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Démontrer la formule $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$. Celle-ci porte le nom d'*identité du parallélogramme*.
Démontrer que celle-ci peut effectivement s'appliquer à un parallélogramme.

3.12.3 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Démontrer la formule $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$.

3.12.4 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Démontrer la formule $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Appliquer cette formule pour calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ sachant que $AB = 4$, $AC = 7$ et $AD = 5$.



3.12.5 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Démontrer la formule $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.

3.12.6 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Démontrer la formule $(\vec{u}\perp\vec{v}) \Leftrightarrow (\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$.

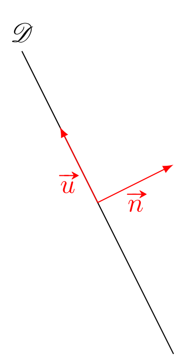
3.12.7 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Démontrer le *théorème de Pythagore* : $(\vec{u}\perp\vec{v}) \Leftrightarrow (\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$.

4 Produit scalaire et droites

4.1 Définition : vecteur normal à une droite

Soit $\mathscr{D}$ une droite. On appelle *vecteur normal à* $\mathscr{D}$

tout vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de $\mathscr{D}$



Souvent, on note $\vec{n}$ un vecteur normal à une droite.

4.2 Mini-exercices

On se place dans un repère orthonormé.

4.2.1 Déterminer un vecteur directeur puis un vecteur normal à la droite $\mathscr{D}\ : 3x + 2y - 1 = 0$.

4.2.2 Déterminer tous les vecteurs normaux à une droite $\mathscr{D}\ : ax + by + c = 0$.

4.3 Théorème : caractérisation de l'appartenance d'un point à une droite

Soient M un point quelconque, A un point fixé et $\mathscr{D}$ la droite passant par A et admettant $\vec{n}$ pour vecteur normal. Alors

$$(M \in \mathscr{D}) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0\right)$$

Cela revient à dire que $\mathscr{D} = \left\{M \in P\ : \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0\right\}$.

Démonstration

— Soit M un point de $\mathscr{D}$.
  Si $M = A$ alors $\overrightarrow{AM} = \vec{0}$ et donc $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
  Si $M \neq A$ alors $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. Puisque $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$, on a $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ par définition d'un vecteur normal.

— Réciproquement, soit M un point tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
  Si $M = A$ alors $M \in \mathscr{D}$ car $A \in \mathscr{D}$.
  Si $M \neq A$ alors la droite (AM) est bien définie et comme $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, $\vec{n}$ est normal à (AM). On en déduit que $(AM)//\mathscr{D}$ car $\vec{n}$ est aussi normal à $\mathscr{D}$. Enfin, A étant un point de $\mathscr{D}$, on a $(AM) = \mathscr{D}$, ce qui prouve que $M \in \mathscr{D}$. ■

4.4 Mini-exercices

On se place dans un repère orthonormé.

4.4.1 Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par le point $A(2,\,6)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-1,\ -1)$. Déterminer une équation de $\mathscr{D}$.

4.4.2 Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $3x+2y-1 = 0$. Déterminer une équation de la perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par $A(-1,\,5)$.

4.5 Théorème : équation d'une droite et vecteur normal

On se place dans un repère orthonormé. Soit $\vec{n}(a,\,b)$ un vecteur *non nul*.
Alors

— une droite $\mathscr{D}$ de vecteur normal $\vec{n}$ a une équation de la forme $ax + by + c = 0$, $c \in \mathbb{R}$;

— réciproquement, toute droite $\mathscr{D}$ dont une équation est de la forme $ax + by + c = 0$ où $(a,\,b) \neq (0,\,0)$ admet $\vec{n}$ pour vecteur normal.

Démonstration

— Soient $M(x,\,y)$ un point quelconque et $A(x_0,\,y_0)$ un point de $\mathscr{D}$.
  D'après la sous-section 4.3, $(M \in \mathscr{D}) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0\right)$ ce qui est encore équivalent à

$$\begin{aligned} a(x - x_0) + b(y - y_0) &= 0 \\ ax - ax_0 + by - by_0 &= 0 \\ ax + by + c &= 0 \quad \text{où } c = -ax_0 - by_0 \end{aligned}$$

— Réciproquement, soit $\mathscr{D}$ une droite d'équation $ax + by + c = 0$. Le vecteur $\vec{v}(-b,\,a)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. Comme $-b \times a + b \times a = 0$, $\vec{n} \perp \vec{v}$ ce qui entraîne que $\vec{n}$ est normal à $\mathscr{D}$. ■

4.6 Mini-exercices

On se place dans un repère orthonormé. Soient $A(1,\,2)$, $B(4,\ -1)$ et $C(2,\,4)$.

4.6.1 Déterminer une équation de la hauteur du triangle ABC issue de A.

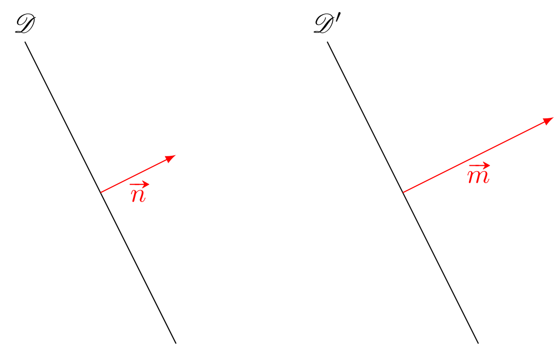
4.6.2 Déterminer une équation de la médiatrice du triangle ABC relative au côté $[A,\,C]$.

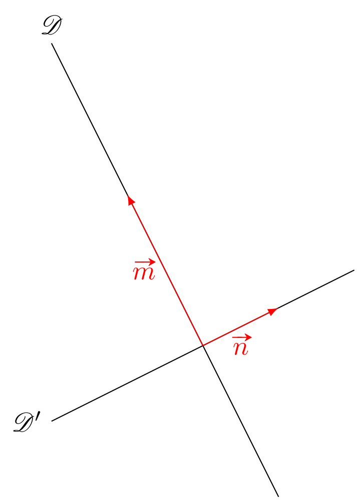
4.7 Théorème : caractérisation du parallélisme et de l'orthogonalité de deux droites

Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{m}$.
Alors

$$(\mathscr{D} // \mathscr{D}') \Leftrightarrow (\vec{n} \text{ et } \vec{m} \text{ sont colinéaires})$$

$$(\mathscr{D} \perp \mathscr{D}') \Leftrightarrow (\vec{n} \perp \vec{m})$$





Dans un repère orthonormé, soient $ax + by + c = 0$ avec $(a,\, b) \neq (0,\, 0)$ et $a'x + b'y + c' = 0$ avec $(a',\, b') \neq (0,\, 0)$ deux équations de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.
Alors

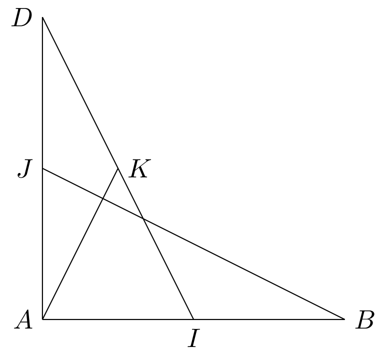
$$(\mathscr{D} \perp \mathscr{D}') \Leftrightarrow (aa' + bb' = 0)$$

Si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ admettent chacune une équation réduite $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ alors

$$(\mathscr{D} \perp \mathscr{D}') \Leftrightarrow (m \times m' = -1)$$

4.8 Exercice

Soient ABD un triangle rectangle et isocèle en A, I, J et K les milieux respectifs des segments $[A,\, B]$, $[A,\, D]$ et $[I,\, D]$.
On note a la longueur commune aux côtés $[A,\, B]$ et $[A,\, D]$.



Démontrer que les droites (AK) et (BJ) sont perpendiculaires.

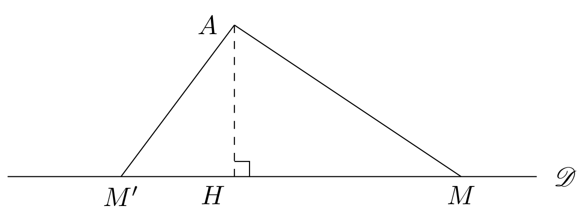
4.9 Distance d'un point à une droite

4.9.1 Théorème et définition

Soit $\mathscr{D}$ une droite. Soit A un point. Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$.
TH. Alors H est le point de $\mathscr{D}$ tel que la distance de A à H est la plus petite des distances de A à un point de $\mathscr{D}$.
DÉF. La distance AH est appelée *distance de A à la droite $\mathscr{D}$* et on la note aussi $d(A, \mathscr{D})$.
Autrement dit, pour tout point M de $\mathscr{D}$ $AH \leqslant AM$ et H est unique.

Démonstration

— Démontrons que pour tout point M de $\mathscr{D}$ $AH \leqslant AM$.
On considère un point M quelconque de $\mathscr{D}$.
Soit $A \in \mathscr{D}$. Alors $H = A$ et donc $AH = 0 \leqslant AM$.
Soit $A \notin \mathscr{D}$.



— Si $M = H$ alors $AM = AH \geqslant AH$;
— si $M \neq H$ alors puisque le triangle AMH est rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, on a $AM^2 = AH^2 + HM^2 > AH^2$ car $HM \neq 0$ entraîne $HM > 0$. Donc $AM > AH$.

On en conclut que, quel que soit le point M de $\mathscr{D}$, $AH \leqslant AM$.

— Démontrons que H est unique.
Soit H' un point de $\mathscr{D}$ tel que quel que soit le point M de $\mathscr{D}$, $AH' \leqslant AM$.
Puisque $H \in \mathscr{D}$, $AH' \leqslant AH$.
H est tel que quel que soit le point M de $\mathscr{D}$, $AH \leqslant AM$.
Puisque $H' \in \mathscr{D}$, $AH \leqslant AH'$.
Donc on a à la fois $AH' \leqslant AH$ et $AH \leqslant AH'$. Cela entraîne que $AH' = AH$ puis $H' = H$. Le point H est donc unique. ■

4.9.2 Théorème : calcul des coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

On se place dans un repère orthonormé. Soit $\mathscr{D}$ une droite d'équation $ax + by + c = 0$. Soient $A(x_A, y_A)$ un point et $H(x_H, y_H)$ le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$. Alors les coordonnées de H sont

$$x_H = \frac{b^2 x_A - ab y_A - ac}{a^2 + b^2} \text{ et } y_H = \frac{-bc - ab x_A + a^2 y_A}{a^2 + b^2}$$

Démonstration

Le vecteur $\vec{u}(-b,\, a)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. Donc ce vecteur est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AH}(x_H - x_A,\, y_H - y_A)$. Donc $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$. D'où $-b(x_H - x_A) + a(y_H - y_A) = 0$ puis $-bx_H + ay_H = -bx_A + ay_A$.

Puisque $H \in \mathscr{D}$, on a $ax_H + by_H + c = 0$ et donc $ax_H + by_H = -c$.

Le couple de coordonnées $(x_H,\, y_H)$ du point H est donc solution du système (S) : $\left\{\begin{array}{rcl} -bx_H + ay_H & = & -bx_A + ay_A \\ ax_H + by_H & = & -c \end{array}\right.$

Puisque $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$, il est différent du vecteur nul et donc l'une de ses coordonnées n'est pas nul. Supposons que ce soit a. Procédant par substitution, les systèmes suivants ont donc le même ensemble solution(s) que (S) :

$\left\{\begin{array}{rcl} y_H & = & \frac{-bx_A+ay_A+bx_H}{a} \\ ax_H + by_H & = & -c \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{rcl} y_H & = & \frac{-bx_A+ay_A+bx_H}{a} \\ ax_H + b\frac{-bx_A+ay_A+bx_H}{a} & = & -c \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{rcl} y_H & = & \frac{-bx_A+ay_A+bx_H}{a} \\ (a^2+b^2)x_H & = & -ca + b^2x_A - bay_A \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{rcl} y_H & = & \frac{-bx_A+ay_A+bx_H}{a} \\ x_H & = & \frac{-ca+b^2x_A-bay_A}{a^2+b^2} \end{array}\right.$ car a n'étant pas nul $a^2 + b^2 \neq 0$

$\left\{\begin{array}{rcl} y_H & = & \frac{-bx_A+ay_A+b\frac{-ca+b^2x_A-bay_A}{a^2+b^2}}{a} \\ x_H & = & \frac{-ca+b^2x_A-bay_A}{a^2+b^2} \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{rcl} y_H & = & \frac{-bx_Aa^2-b^3x_A+a^3y_A+ay_Ab^2-bca+b^3x_A-b^2ay_A}{a(a^2+b^2)} \\ x_H & = & \frac{-ca+b^2x_A-bay_A}{a^2+b^2} \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{rcl} y_H & = & \frac{-bax_A+a^2y_A-bc}{a^2+b^2} \\ x_H & = & \frac{-ca+b^2x_A-bay_A}{a^2+b^2} \end{array}\right.$ ■

4.9.3 Remarque

Le déterminant du système précédent est $\det = -b^2 - a^2$. Puisqu'il n'est pas nul pour la raison évoquée dans la démonstration, on peut appliquer les formules de Cramer pour le résoudre.

On a $x_H = \dfrac{\begin{vmatrix} -bx_A + ay_A & a \\ -c & b \end{vmatrix}}{-(a^2+b^2)} = \frac{-b^2x_A+aby_A+ac}{-(a^2+b^2)} = \frac{b^2x_A-aby_A-ac}{a^2+b^2}$

et

$y_H = \dfrac{\begin{vmatrix} -b & -bx_A + ay_A \\ a & -c \end{vmatrix}}{-(a^2+b^2)} = \frac{bc+abx_A-a^2y_A}{-(a^2+b^2)} = \frac{-bc-abx_A+a^2y_A}{a^2+b^2}$

4.9.4 Exemple

Calculer les coordonnées du projeté orthogonal du point $A(1,\, 2)$ à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x + 1$.

Soit $H(x_H,\, y_H)$ le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$.

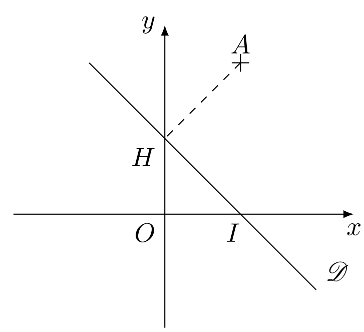
Puisque H appartient à $\mathscr{D}$, on a $y_H = -x_H + 1$.

Le vecteur $\vec{u}(1,\, -1)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. Donc $\overrightarrow{AH}(x_H - 1,\, y_H - 2)$ est orthogonal à $\vec{u}$.

Donc $(x_H - 1) \times 1 + (y_H - 2) \times (-1) = 0$.

Le couple $(x_H,\, y_H)$ est donc solution du système $\left\{\begin{array}{rcl} (x_H - 1) \times 1 + (y_H - 2) \times (-1) & = & 0 \\ y_H & = & -x_H + 1 \end{array}\right.$

que l'on résout par substitution :



$\left\{\begin{array}{rcl} -y_H - y_H + 2 & = & 0 \\ y_H & = & -x_H + 1 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{rcl} 2y_H & = & 2 \\ x_H & = & -y_H + 1 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{rcl} y_H & = & 1 \\ x_H & = & 0 \end{array}\right.$

Donc les coordonnées du projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$ sont $(0,\, 1)$.

5 Produit scalaire et cercles

On sait qu'un cercle est l'ensemble des points M situés à une distance fixe r appelée *rayon* d'un point fixe A appelé *centre* et qui donc vérifient $AM = r$. La notion de produit scalaire permet d'en donner une autre définition puisque, de façon équivalente, on a $AM = r$ ensuite $AM^2 = r^2$ puis $AM^2 = r^2$ et enfin $\overrightarrow{AM}^2 = r^2$.

5.1 Définition : cercle

Soient A un point de P et r un réel positif ou nul. On appelle *cercle de centre A et de rayon r*

$$\text{l'ensemble } \left\{M \in P \ : \overrightarrow{AM}^2 = r^2\right\}$$

Le cercle de centre A et de rayon r est souvent noté $\mathscr{C}(A,\, r)$.

5.2 Théorème : équation d'un cercle

Soit $(O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ un repère orthonormé. Soient $A(x_A,\, y_A)$ un point et r un réel positif ou nul.

5.2.1 Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon r.
Un point $M(x,\, y)$ appartient à $\mathscr{C}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}^2 = r^2$ c'est-à-dire $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$ ou encore $x^2 + y^2 - 2xx_A - 2yy_A + x_A^2 + y_A^2 - r^2 = 0$.
En posant $\alpha = -2x_A$, $\beta = -2y_A$ et $\gamma = x_A^2 + y_A^2 - r^2$, on obtient $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$.
Donc $M(x,\, y) \in \mathscr{C}$ si et seulement s'il existe un triplet de réels $(\alpha,\, \beta,\, \gamma)$
tel que $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$.
Cette relation entre les coordonnées x et y d'un point quelconque M de $\mathscr{C}$ est appelée *équation cartésienne de $\mathscr{C}$*.
On vient de démontrer le
Théorème
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, tout cercle admet une équation cartésienne du type

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0,\ (\alpha,\, \beta,\, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$

5.2.2 Remarque
Soit $\mathscr{C}$ un cercle dont une équation est $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$. Alors toute équation équivalente à celle-ci est encore une équation de cercle. En particulier $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$ où x_A et y_A sont deux réels et r un réel positif est une équation du cercle dont le centre a pour coordonnées $(x_A,\, y_A)$ et pour rayon r.

5.2.3 Réciproquement, toute équation de ce type est-elle l'équation d'un cercle ?
On considère l'ensemble $\mathfrak{C} = \{M(x,\, y) \in P \ : \exists(\alpha,\, \beta,\, \gamma) \in \mathbb{R}^3\ x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0\}$.
De façon équivalente, on a

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma &= 0\\
x^2 + \alpha x + y^2 + \beta y + \gamma &= 0\\
\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \gamma &= 0\\
\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \gamma &= 0\\
\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \gamma
\end{aligned}$$

Soit $\Omega\left(-\frac{\alpha}{2},\, -\frac{\beta}{2}\right)$. Le membre de gauche de l'égalité est le carré de la distance du point M au point Ω. Ainsi, pour le membre de droite, deux cas se présentent :

— si $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \gamma < 0$ alors aucun point M du plan ne vérifie l'égalité et donc $\mathfrak{C} = \varnothing$;

— si $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \gamma \geqslant 0$ alors $\mathfrak{C}$ est le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \gamma}$.

On vient de démontrer le
Théorème
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, toute relation de la forme $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ où $(\alpha,\, \beta,\, \gamma)$ est un triplet de réels tel que $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \gamma \geqslant 0$ est l'équation cartésienne d'un cercle. Son centre a pour coordonnées $\left(-\frac{\alpha}{2},\, -\frac{\beta}{2}\right)$ et son rayon est $\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \gamma}$.

5.3 Mini-exercice

On se place dans un repère orthonormé.

5.3.1 Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $K(1, 2)$ et de rayon 2.

5.3.2 L'équation $x^2 + y^2 - x - 3y + 3 = 0$ est-elle celle d'un cercle ?

5.4 Théorème : caractérisation de l'appartenance d'un point à un cercle

Soient M un point quelconque de P, A et B deux points fixés et distincts et $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[A, B]$.
Alors

$$(M \in \mathscr{C}) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0\right)$$

Cela revient à dire que $\mathscr{C} = \left\{M \in P \ : \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0\right\}$

Démonstration

— Si $M = A$ ou $M = B$ alors $M \in \mathscr{C}$ et M vérifie $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ car $\overrightarrow{MA} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

— Si $M \neq A$ et $M \neq B$ alors les propositions suivantes sont équivalentes :
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$
$(MA) \perp (MB)$
ABM est rectangle en M
$M \in \mathscr{C}$ puisque $[A, B]$ est un diamètre de $\mathscr{C}$ ■

5.5 Mini-exercice

On se place dans un repère orthonormé. Soient $A(-1, 3)$ et $B(2, 2)$.

5.5.1 Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[A, B]$.

5.5.2 À partir de cette équation, déterminer le centre et le rayon du cercle.

6 Produit scalaire et triangles

6.1 Théorèmes de la médiane

Soient $[A, B]$ un segment et I son milieu. Soit M un point quelconque.
Alors

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

$$MA^2 - MB^2 = 2\,\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Démonstration

— $$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} \\ &= 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} \\ &= 2\overrightarrow{MI} + \vec{0} \\ &= 2\overrightarrow{MI} \end{aligned}\right| \text{ car } I \text{ est le milieu de } [A, B]$$

— $$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) \\ &= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \\ &= MI^2 - IA^2 \\ &= MI^2 - \tfrac{AB^2}{4} \end{aligned}$$

— $$\begin{array}{rcl|l} MA^2+MB^2 & = & \overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2 & \\ & = & \left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)^2-2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} & \text{car } \left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)^2=\overrightarrow{MA}^2+2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}^2 \\ & = & \left(2\overrightarrow{MI}\right)^2-2\left(MI^2-\frac{AB^2}{4}\right) & \text{d'après le premier résultat et la formule précédente} \\ & = & 4\overrightarrow{MI}^2-2MI^2+\frac{AB^2}{2} & \\ & = & 4MI^2-2MI^2+\frac{AB^2}{2} & \\ & = & 2MI^2+\frac{AB^2}{2} & \end{array}$$

— $$\begin{array}{rcl|l} MA^2-MB^2 & = & \overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2 & \\ & = & \left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right) & \\ & = & \overrightarrow{BA}\cdot 2\overrightarrow{MI} & \text{d'après le premier résultat} \\ & = & 2\,\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB} & \end{array}$$

■

6.2 Particularités

6.2.1 Que donne la première égalité du théorème 6.1 lorsqu'un point M du plan appartient au cercle de diamètre $[A,\,B]$?
Soit M un point du plan. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{gathered} M \text{ appartient au cercle de diamètre } [A,\,B] \\ \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 \\ MI^2-\frac{AB^2}{4}=0 \\ 4MI^2=AB^2 \\ IM^2=\left(\frac{AB}{2}\right)^2 \\ IM=\frac{AB}{2} \end{gathered}$$

On retrouve une caractérisation de l'appartenance d'un point à un cercle : sa distance au centre du cercle est égale à la moitié de son rayon.

6.2.2 Que donne la seconde égalité du théorème 6.1 lorsqu'un point M du plan est tel que le triangle ABM est rectangle en M ?
Soit M un point du plan. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{gathered} \text{Le triangle } ABM \text{ est rectangle en } M \\ MA^2+MB^2=AB^2 \\ 2MI^2+\frac{AB^2}{2}=AB^2 \\ 2MI^2=\frac{AB^2}{2} \\ IM^2=\frac{AB^2}{4} \\ IM=\frac{AB}{2} \end{gathered}$$

On retrouve une caractérisation d'un triangle ABM rectangle en M : sa distance au milieu de $[A,\,B]$ est égale à la moitié de AB.

6.2.3 Que donne la troisième égalité du théorème 6.1 lorsqu'un point M du plan appartient à la médiatrice du segment $[A,\,B]$?
Soit M un point du plan. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned}
M \text{ appartient à la médiatrice de } [A,\, B] \\
M \text{ appartient à la perpendiculaire à la droite } (AB) \text{ passant par } I \\
\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\
2\,\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\
MA^2 - MB^2 &= 0 \\
MA^2 &= MB^2 \\
MA &= MB
\end{aligned}$$

On retrouve la caractérisation de la médiatrice d'un segment comme ensemble des points équidistants des extrémités du segment.

6.3 Mini-exercice

Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 3$ et $BC = 5$. Calculer la longueur de la médiane de ABC issue de C.

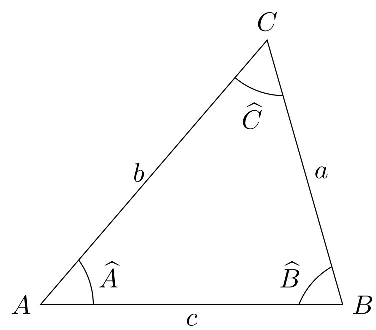
6.4 Théorème d'Al-Kashi [1]

Soit ABC un triangle.
On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.
Alors

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$$



Démonstration

$$\begin{aligned}
a^2 &= \overrightarrow{BC}^2 \\
&= \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 \\
&= \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 \\
&= BA^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= c^2 + b^2 - 2cb\cos\widehat{A}
\end{aligned}$$

Les deux autres formules se démontrent de façon identique. ■

6.5 Remarque

Le théorème d'Al-Kashi permet de retrouver le théorème de Pythagore.
Par exemple, avec la première formule, on a, de façon équivalente :

$$\begin{aligned}
ABC \text{ est rectangle en } A \\
\cos\widehat{A} &= 0 \\
a^2 &= b^2 + c^2
\end{aligned}$$

6.6 Mini-exercice

Soit ABC un triangle tel que $AB = 12$, $AC = 8$ et $BC = 10$. Calculer la mesure de $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

1. Al-Kashi, mathématicien et astronome perse (1380–1429).

6.7 Théorème : trois nouvelles expressions de l'aire d'un triangle

Soit ABC un triangle. On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$ et $\mathscr{A}$ l'aire de ABC.
Alors

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}$$

Démonstration
Soient H le projeté orthogonal de B sur (AC). Alors $\mathscr{A} = \frac{1}{2}AC \times BH$. Or $\sin\widehat{A} = \frac{BH}{AB}$. Donc $BH = AB\sin\widehat{A}$ ce qui donne $\mathscr{A} = \frac{1}{2}AC \times AB\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$.
Les deux autres formules se démontrent à l'identique. ■

6.8 Mini-exercice

Calculer l'aire du triangle ABC du mini-exercice 6.6.
Le théorème suivant relève des *approfondissements possibles*.

6.9 Théorème : formule (ou loi) des sinus

Soit ABC un triangle *non aplati*. On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$ et $\mathscr{A}$ l'aire de ABC.
Alors

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = \frac{abc}{2\mathscr{A}}$$

C'est la *formule des sinus*.
Démonstration
Le triangle ABC n'étant pas aplati, $\sin\widehat{A}$, $\sin\widehat{B}$ et $\sin\widehat{C}$ ne sont pas nuls.
Des égalités $\frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \mathscr{A}$, on déduit

$$\begin{array}{ccccccc|l}
bc\sin\widehat{A} & = & ab\sin\widehat{C} & = & ac\sin\widehat{B} & = & 2\mathscr{A} & \\
\frac{bc\sin\widehat{A}}{abc} & = & \frac{ab\sin\widehat{C}}{abc} & = & \frac{ac\sin\widehat{B}}{abc} & = & \frac{2\mathscr{A}}{abc} & \\
\frac{\sin\widehat{A}}{a} & = & \frac{\sin\widehat{C}}{c} & = & \frac{\sin\widehat{B}}{b} & = & \frac{2\mathscr{A}}{abc} & \\
\frac{\sin\widehat{A}}{a} & = & \frac{\sin\widehat{C}}{c} & = & \frac{\sin\widehat{B}}{b} & = & \frac{2\mathscr{A}}{abc} & \text{le triangle } ABC \text{ n'étant pas aplati,} \\
\frac{a}{\sin\widehat{A}} & = & \frac{b}{\sin\widehat{B}} & = & \frac{c}{\sin\widehat{C}} & = & \frac{abc}{2\mathscr{A}} & \sin\widehat{A},\ \sin\widehat{B} \text{ et } \sin\widehat{C} \text{ ne sont pas nuls}
\end{array}$$

■

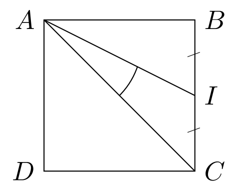
7 Exercices

7.1 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

7.1.1 Démontrer que $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
Cette inégalité s'appelle *inégalité de Cauchy-Schwarz*[2] [3].

7.1.2 Pour quels vecteurs y a-t-il égalité ?

7.2 Soient $ABCD$ un carré de côté a et I le milieu de $[B, C]$.



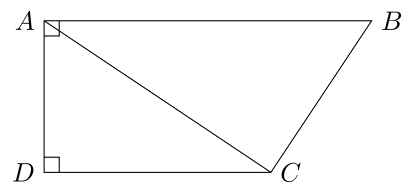
7.2.1 Calculer AI et AC.

7.2.2 Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

7.2.3 Calculer $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC}$ de deux façons différentes.

7.2.4 En déduire une mesure de $\widehat{IAC}$.

7.3 Soit $ABCD$ un trapèze rectangle tel que la diagonale (AC) est perpendiculaire à (BC).



7.3.1 Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ de deux façons différentes.

7.3.2 En déduire que $AC^2 = AB \times CD$.

7.4 Soient A, B, C et D quatre points. Déterminer et construire les ensembles de points suivants :

7.4.1 $\mathscr{E}_1 = \left\{ M \in P \ : \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\right) = 0 \right\}$;

7.4.2 $\mathscr{E}_2 = \left\{ M \in P \ : \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right) = 0 \right\}$;

7.4.3 $\mathscr{E}_3 = \left\{ M \in P \ : \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| \right\}$.

7.5 Soient (AC) et (BD) deux droites perpendiculaires.
En décomposant $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, démontrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

7.6 Soient ABC un triangle, O le centre du cercle circonscrit à ABC et H le point tel que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

7.6.1 Exprimer $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ puis calculer $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$.

7.6.2 Procéder de même avec $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AC}$.

7.6.3 En déduire que H est l'orthocentre de ABC.

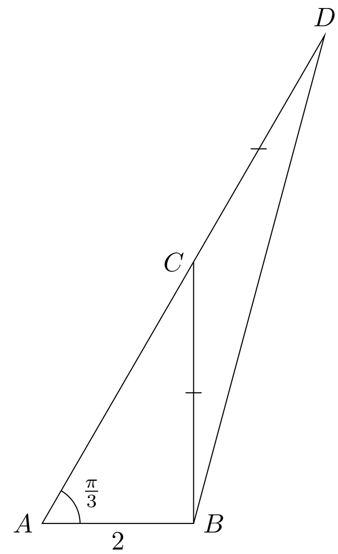
7.7 Soient $ABCD$ un quadrilatère convexe.

7.7.1 Démontrer que $AB^2 - BC^2 + CD^2 - AD^2 = 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$.

7.7.2 En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que les diagonales de $ABCD$ soient orthogonales.

2. Augustin-Louis Cauchy, mathématicien français (1789–1857).
3. Hermann Amandus Schwarz, mathématicien allemand (1843–1921).

7.8 Soit ABC un triangle tel qu'une mesure du secteur $\widehat{BAC}$ est $\frac{\pi}{3}$ et $AB = 2$. Soit D le point de la demi-droite d'origine C ne contenant pas A tel que $DC = BC$.



7.8.1 Démontrer que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 4$.

7.8.2 En calculant $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$ d'une autre manière, démontrer que $AC = 4$.

7.8.3 Démontrer que $BC = 2\sqrt{3}$.

7.8.4 Déterminer une mesure des secteurs $\widehat{BCD}$ et $\widehat{DBC}$.

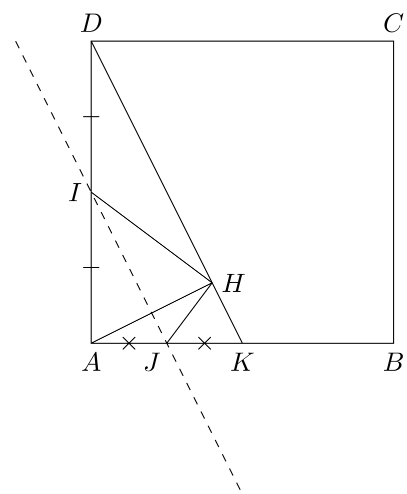
7.8.5 Démontrer que $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = -6\sqrt{3}$.

7.8.6 En calculant autrement $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}$, démontrer que $BD = 2\sqrt{3} \times \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

7.8.7 En calculant de deux façons différentes $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$, déterminer la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$.

7.8.8 En se plaçant dans un repère adéquate, calculer l'abscisse de D.

7.9 Soit $ABCD$ un carré de coté 1.



Soient I, K et J les milieux respectifs des segments $[A,\, D]$, $[A,\, B]$ et $[A,\, K]$.

Soit H le pied de la perpendiculaire à la droite (DK) passant par A.

On veut démontrer que les droites (HI) et (HJ) sont perpendiculaires par six méthodes différentes.

7.9.1 1re méthode. Utiliser les propriétés d'un triangle rectangle.

7.9.2 2e méthode. Produit scalaire.
Démontrer que $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{HA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et que $\overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{HA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AK}$. En déduire que $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HJ} = 0$.

7.9.3 3e méthode. Angles de couples.

On oriente le plan de façon que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AD}}\right)$ est l'angle droit direct $\widehat{\delta}$.

En repérant deux triangles isocèles dans la figure et en utilisant la caractérisation de tels triangles à l'aide d'une égalité angulaire, démontrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{HI},\, \overrightarrow{HJ}}\right) = \widehat{\delta}$.

7.9.4 4e méthode. Angles de couples bis.
On n'oriente pas le plan (ce n'est pas utile).
En utilisant la caractérisation de triangles isocèles à l'aide d'une égalité angulaire entre deux doubles d'angles, démontrer que $2\left(\widehat{\overrightarrow{HI},\, \overrightarrow{HJ}}\right) = \widehat{\pi}$.

7.9.5 5e méthode. Symétrie orthogonale.

On oriente le plan de façon que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AD}}\right)$ est l'angle droit direct $\widehat{\delta}$. Démontrer que (IJ) est la médiatrice de $[A,\, H]$, que IHJ est l'image de IAJ par une symétrie orthogonale puis que $\left(\widehat{\overrightarrow{HI},\, \overrightarrow{HJ}}\right) = \widehat{\delta}$.

7.9.6 6e méthode. Méthode des coordonnées.

On se place dans le repère orthonormé $\left(A,\, \overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AD}\right)$. Déterminer des équations de (DK) et (HA), les coordonnées de H puis démontrer que $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HJ} = 0$.

7.10 Soient $\mathscr{C}$ un cercle de centre O, de rayon non nul et M un point qui n'appartient au disque fermé de centre O.
On considère une droite $\mathscr{D}$ qui passe par M et on appelle P et Q les deux points d'intersection de $\mathscr{D}$ avec $\mathscr{C}$.
On note r le rayon de $\mathscr{C}$ et d la distance OM.

7.10.1 Faire un dessin.

7.10.2 Calcul de $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ}$ de deux façons différentes.

7.10.2.1 Démontrer que $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = d^2 - r^2$ en considérant le milieu I de $[P,\, Q]$.

7.10.2.2 Démontrer que $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = d^2 - r^2$ en considérant le diamétral de P *i.e.* le symétrique de P par rapport à O.

7.10.3 Que fait apparaître ce calcul ?

7.11 Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 6$ et $AD = 4$. Soient A' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A et C sur $[B,\, D]$.

7.11.1 Faire un dessin.

7.11.2 Démontrer que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{BD}$.

7.11.3 Démontrer que $AD^2 - AB^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

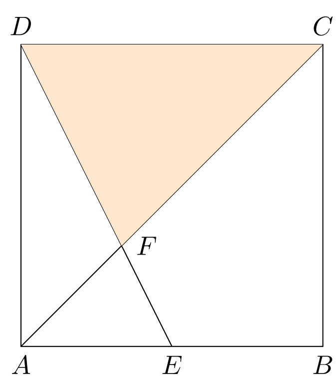
7.11.4 En déduire la valeur exacte de $A'C'$.

7.11.5 Autre méthode. En considérant un repère adéquate, déterminer les coordonnées de A' et C' puis calculer $A'C'$.

7.11.6 Une barre de fer de longueur $A'C'$ dont le centre est placé au milieu de $[B,\, D]$ peut-elle tourner autour de l'axe passant par ce milieu et perpendiculaire au plan du rectangle sans rencontrer les côtés $[A,\, B]$ et $[C,\, D]$?

7.11.7 Calculer la distance du point D à la droite (AA').

7.12 Soit $ABCD$ un carré de côté a. Soit E le milieu de $[A,\, B]$. Calculer une mesure du secteur $(\widehat{DFC})$, celui qui ne contient pas A.



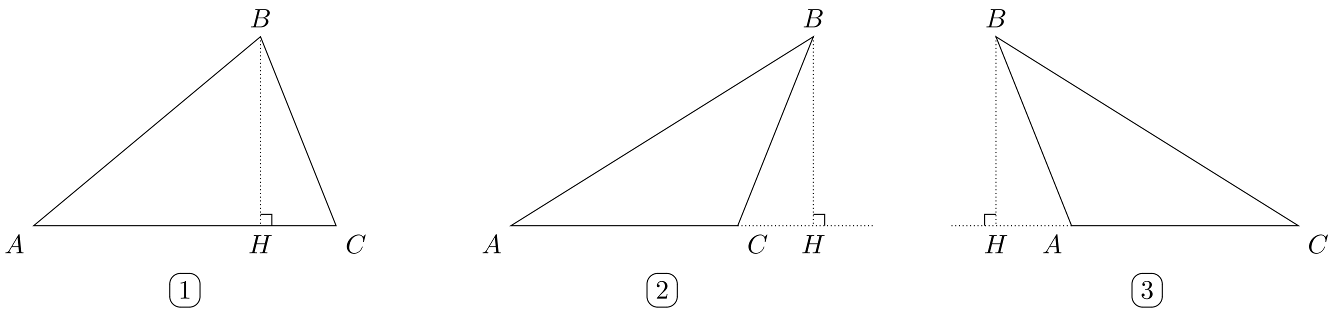
Solutions des exercices relatifs au produit scalaire

Solutions des exercices de la présentation

1.1 Un certain défaut de rectangularité d'un triangle

Soit ABC un triangle non rectangle en A. On considère la différence $\Delta = AB^2 + AC^2 - BC^2$.

Soit H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC) (ou si l'on préfère, le pied de la hauteur issue de B dans ABC). Suivant la position relative de H par rapport à A et C sur (AC), il y a trois cas de figures à envisager :



On veut exprimer $\Delta = AB^2 + AC^2 - BC^2$ en fonction des distances AC et AH.

1.1.1 Établir les relations $BC^2 = HC^2 + HB^2$ puis $AB^2 = HA^2 + HB^2$.
En déduire une expression de Δ.

Puisque HBC et HAB sont rectangles en H, d'après le théorème de Pythagore, on a
$BC^2 = HC^2 + HB^2$ et $AB^2 = HA^2 + HB^2$.
Donc $\Delta = AB^2 + AC^2 - BC^2 = HA^2 + HB^2 + AC^2 - HC^2 - HB^2 = HA^2 + AC^2 - HC^2$.

1.1.2 Cas 1 : en écrivant $HC = AC - AH$, donner une autre expression de Δ.

$\Delta = HA^2 + AC^2 - (AC - AH)^2 = HA^2 + AC^2 - AC^2 - AH^2 + 2AC \times AH = 2AC \times AH$

1.1.3 Cas 2 : en écrivant $HC = AH - AC$, donner une autre expression de Δ.

$\Delta = HA^2 + AC^2 - (AH - AC)^2 = 2AC \times AH$ car $AH - AC$ et $AC - AH$ étant opposés, ils ont le même carré.

1.1.4 Cas 3 : en écrivant $HC = AC + AH$, donner une autre expression de Δ.

$\Delta = HA^2 + AC^2 - (AC + AH)^2 = HA^2 + AC^2 - AC^2 - AH^2 - 2AC \times AH = -2AC \times AH$

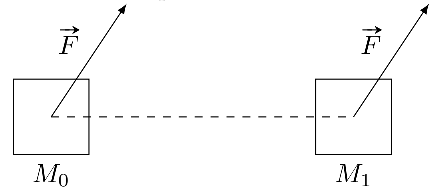
1.1.5 En condensant les trois cas en deux, exprimer $AC \times AH$.

Dans les cas 1 et 2, les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens. Alors $AC \times AH = \frac{\Delta}{2}$.
Dans le cas 3, les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de sens contraire. Alors $AC \times AH = -\frac{\Delta}{2}$.

Le réel $AC \times AH$ ou $-AC \times AH$ où H est le projeté orthogonal de B sur (AC) est appelé *produit scalaire* de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et noté $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. C'est donc le demi-défaut de rectangularité du triangle ABC ou son opposé.

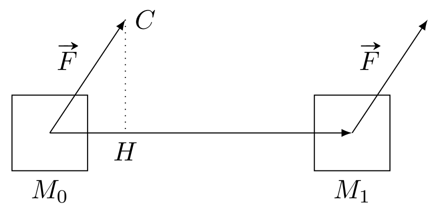
1.2 En sciences physiques, le travail d'une force

On dit qu'*une force appliquée à un objet effectue un travail* lorsque son point d'application se déplace. En notant $\overrightarrow{F}$ cette force, M_0 puis M_1 deux points d'application successifs de $\overrightarrow{F}$, le travail effectué par $\vec{F}$ noté W est $\vec{F} \cdot \overrightarrow{M_0M_1}$



Pour tirer sur 10 m un chariot à roulettes, un homme exerce une force d'intensité 350 N selon un angle de 45°.

1.2.1 Quel est le travail effectué par la force $\vec{F}$?



$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{M_0M_1} = M_0M_1 \times M_0H = 10M_0H$ où H est le projeté orthogonal de C sur (M_0M_1).
Dans le triangle M_0HC rectangle en H, on a $\cos 45° = \frac{M_0H}{M_0C}$ et donc $M_0H = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 350 = 175\sqrt{2}$.
Donc $W = 10 \times 175\sqrt{2} = 1750\sqrt{2} \simeq 2475$ (joules).

1.2.2 Quelle est l'intensité de la force que l'homme aurait dû exercer pour effectuer le même travail en poussant le chariot dans l'axe de son déplacement ?

Si le travail est effectué en poussant le chariot dans le sens du déplacement, alors les vecteurs $\vec{F}$ et $\overrightarrow{M_0M_1}$ sont colinéaires et le point C appartient à la demi-droite $[M_0,\, M_1)$.
Dans ce cas, $W = M_0M_1 \times M_0C = 10 \times M_0C$.
Donc $1750\sqrt{2} = 10 \times M_0C$ car l'homme a effectué le même travail.
D'où $M_0C = 175\sqrt{2} \simeq 247{,}5$ (mètres).

2.10 Mini-exercices

2.10.1 Soient A et B deux points. Quelle différence y a-t-il entre $\overrightarrow{AB}^2$ et $\overrightarrow{BA}^2$?

2.10.2 Calculer le produit scalaire de deux vecteurs qui sont colinéaires et de même sens ou alors colinéaires et de sens contraires.

RÉPONSE

2.10.1 On a $\overrightarrow{AB}^2 = AB = BA = \overrightarrow{BA}^2$. Il n'y a donc pas de différence entre $\overrightarrow{AB}^2$ et $\overrightarrow{BA}^2$.

2.10.2 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors

— il existe un réel tel que $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$ ou $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$;

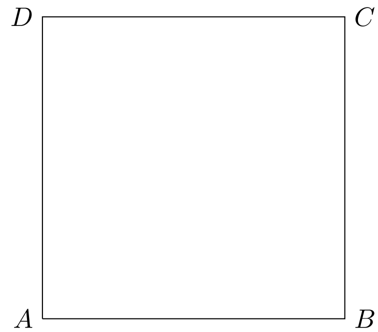
— les points A, B et C sont alignés.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens alors $k \geqslant 0$ et les points B et C appartiennent à la même demi-droite d'origine A. Dans ce cas, $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC = AB \times kAB = kAB^2$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires alors $k \leqslant 0$ et les points B et C appartiennent à deux demi-droites opposées d'origine A. Dans ce cas, $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times (-AC) = AB \times (-(-kAB)) = kAB^2$.

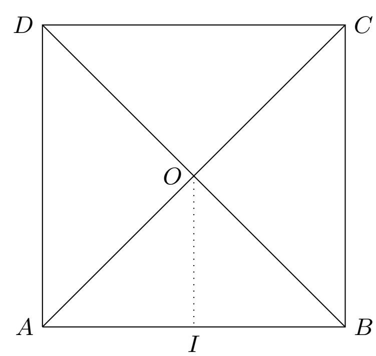
2.15 Exercice

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $AB = 4$.
Calculer les produits scalaires suivants :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AD}$.



RÉPONSE

Soit I le milieu de $[A, B]$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ car $(AB) \perp (BC)$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB^2 = -16$
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB \times AB = 16$
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = AB \times AI = 4 \times 2 = 8$ où I, projeté orthogonal de O sur (AB), est le milieu de $[A, B]$ puisque le triangle OAB est isocèle en O.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB} = AB \times AB = 16$
$\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ car $(BO) \perp (OC)$.
$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = -OB \times OD = -\frac{1}{2}DB \times \frac{1}{2}DB = -\frac{1}{4}DB^2 = -\frac{1}{4} \times 32 = -8$ car, d'après le thèorème de Pythagore appliqué au triangle ABD rectangle en A, on a $DB^2 = AB^2 + AD^2 = 16 + 16 = 32$.



3.2 Exercice

Soient ABC un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 2\sqrt{2}$ et mes $\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{3\pi}{4}$ et B' le projeté orthogonal de B sur (AC).

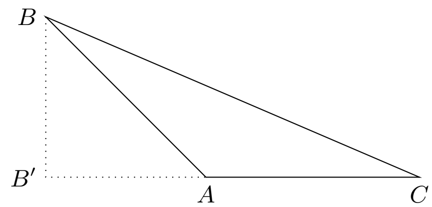
3.2.1 Faire une figure.

3.2.2 En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$ de deux façons différentes, calculer AB'.

RÉPONSE

Soient ABC un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 2\sqrt{2}$ et mes $\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{3\pi}{4}$ et B' le projeté orthogonal de B sur (AC).

3.2.1 Figure.



3.2.2 Première façon de calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

On a $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = -AC \times AB' = -2\sqrt{2}AB'$.

Deuxième façon de calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

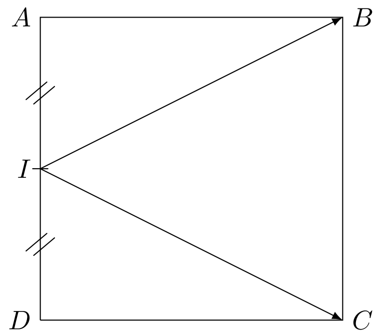
On a $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AC \times AB \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 2\sqrt{2} \times 3 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -6$.

D'où $-2\sqrt{2}AB' = -6$ et donc $AB' = \frac{-6}{-2\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

3.5 Exercices

3.5.1 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u}^2 = 8$, $\vec{v}^2 = 1$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$. Calculer $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v})$.

3.5.2 Soient a un réel strictement positif, $ABCD$ un carré de coté a et I le milieu de $[A, D]$.



3.5.2.1 Calculer $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC}$ en fonction de a.

3.5.2.2 Calculer IC en fonction de a.

3.5.2.3 Soit H le projeté orthogonal de B sur la droite (IC). En calculant $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC}$ d'une autre manière qu'à la première question, calculer IH en fonction de a.

3.5.3 Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles de même centre O et de rayons respectifs r et r' tels que $r' > r$. Soient A un point de $\mathscr{C}$ et B un point de $\mathscr{C}'$ tels que O, A et B sont alignés dans cet ordre. Soient C un point de $\mathscr{C}$ et D un point de $\mathscr{C}'$ tels que O, C et D sont alignés dans cet ordre. Les droites (OD) et (OB) sont perpendiculaires.

Faire une figure.

Soit I le milieu de $[A, D]$. Démontrer que $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA})$ puis que la médiane issue de O dans le triangle OAD est la hauteur issue de O dans le triangle OBC.

RÉPONSE

3.5.1 On a

$$\begin{aligned}(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v}) &= 2\vec{u}^2 - 4\vec{u} \cdot \vec{v} + 3\vec{v} \cdot \vec{u} - 6\vec{v}^2 \\ &= 2 \times 8 - 4 \times 1 + 3 \times 1 - 6 \times 1 \\ &= 16 - 4 + 3 - 6 \\ &= 9\end{aligned}$$

3.5.2

3.5.2.1 On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} &= (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{IC} \\ &= \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IC} \\ &= -IA \times ID + AB \times AB \\ &= -IA^2 + AB^2 \\ &= -\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + a^2 \\ &= \frac{3}{4}a^2\end{aligned}$$

3.5.2.2 On a

$$\begin{aligned}IC &= \sqrt{ID^2 + DC^2} \quad \text{car le triangle } IDC \text{ étant rectangle en } D, \text{ on peut appliquer le théorème de Pythagore} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + a^2} \\ &= \sqrt{\frac{5}{4}a^2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}a\end{aligned}$$

3.5.2.3 H étant le projeté orthogonal de B sur (IC), on a $\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC} = IH \times IC = IH \times \frac{\sqrt{5}}{2}a$.
On en déduit que $\frac{3}{4}a^2 = IH \times \frac{\sqrt{5}}{2}a$ puis que $IH = \frac{3}{4} \times \frac{2}{\sqrt{5}}a$ et enfin $IH = \frac{3\sqrt{5}}{10}a$.

3.5.3 Le dessin arrive…
Soit I le milieu de $[A,\, D]$. Démontrons que $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA})$.
On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OI} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI}\\
\overrightarrow{OI} &= \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DI}\\
2\overrightarrow{OI} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DI}\\
2\overrightarrow{OI} &= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}\\
2\overrightarrow{OI} &= \overrightarrow{0} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} \text{ car, } I \text{ étant le milieu de } [A,\, D], \text{ on a } \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{0}\\
\overrightarrow{OI} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA})
\end{aligned}$$

La médiane issue de O dans le triangle OAD est donc la droite (OI). Démontrons que $(OI) \perp (BC)$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{BC} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})\\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})\\
&= \frac{1}{2}(OD \times OC - 0 + 0 - OA \times OB) \text{ car les droites } (OD) \text{ et } (OB) \text{ sont perpendiculaires}\\
&= \frac{1}{2}(r' \times r - r \times r')\\
&= 0
\end{aligned}$$

La droite (OI) est donc la perpendiculaire à la la droite (BC) passant par O. C'est donc la hauteur issue de O dans le triangle OBC.

3.10 Exercices

3.10.1 Calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

3.10.2 Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

3.10.3 Déterminer la mesure des secteurs $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$.

3.10.4 Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC). Calculer les distances AH et CH.

RÉPONSE

3.10.1 $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(0-4)^2+(5-1)^2} = \sqrt{(-4)^2+(4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(-2-4)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{(-6)^2+(-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{(-2-0)^2+(-1-5)^2} = \sqrt{(-2)^2+(-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
Ces calculs donnent les coordonnées de chacun des trois vecteurs : $\overrightarrow{AB}(-4,\,4)$, $\overrightarrow{AC}(-6,\,-2)$ et $\overrightarrow{BC}(-2,\,-6)$. Ils permettent aussi de dire que le triangle ABC est isocèle en C.

3.10.2 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -4\times(-6)+4\times(-2) = 24-8 = 16$
$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} = -2\times 4+(-6)\times(-4) = -8+24 = 16$
$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 6\times 2+2\times 6 = 24$

3.10.3 De la formule $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$, on déduit que $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}$ et donc $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{16}{4\sqrt{2}\times 2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.
D'où mes$(\widehat{BAC}) \simeq 63{,}43°$ arrondi au centième.
De la formule $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = CB\times CA\times\cos(\widehat{ACB})$, on déduit que $\cos(\widehat{ACB}) = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{CB\times CA}$ et donc $\cos(\widehat{ACB}) = \frac{24}{2\sqrt{10}\times 2\sqrt{10}} = \frac{3}{5}$.
D'où mes$(\widehat{BAC}) \simeq 53{,}13°$ arrondi au centième.

3.10.4 Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC).
On a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AC\times AH$ et donc $AH = \frac{16}{2\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{5} \simeq 2{,}53$ arrondi au centième.
On a $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = CA\times CH$ et donc $CH = \frac{24}{2\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}}{5} \simeq 3{,}8$ arrondi au centième.

3.12 Exercices pas mini

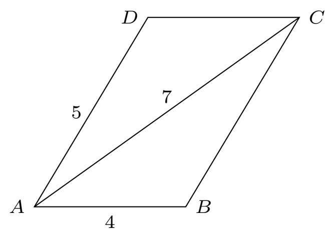
3.12.1 Utiliser l'une des formules précédentes pour répondre d'une autre manière à la première question de l'exercice **3.5.2**.

3.12.2 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Démontrer la formule $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=2\|\vec{u}\|^2+2\|\vec{v}\|^2$. Celle-ci porte le nom d'*identité du parallélogramme*.

Démontrer que celle-ci peut effectivement s'appliquer à un parallélogramme.

3.12.3 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Démontrer la formule $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{4}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$.

3.12.4 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Démontrer la formule $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Appliquer cette formule pour calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ sachant que $AB=4$, $AC=7$ et $AD=5$.



3.12.5 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Démontrer la formule $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}-\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$.

3.12.6 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Démontrer la formule $(\vec{u}\perp\vec{v})\Leftrightarrow(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2)$.

3.12.7 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Démontrer le *théorème de Pythagore* : $(\vec{u}\perp\vec{v})\Leftrightarrow(\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2)$.

RÉPONSE

3.12.1 Dans la première question de l'exercice **3.5.2**, on devait calculer le produit scalaire $\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}$.

Soit J le milieu de $[B, C]$.

On a

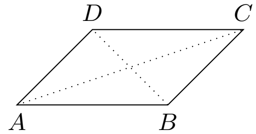
$$\begin{aligned}\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}&=(\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JB})\cdot(\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC})\\&=(\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JB})\cdot(\overrightarrow{IJ}-\overrightarrow{JB})\text{ car } J \text{ étant le milieu de } [B, C], \overrightarrow{JC}=-\overrightarrow{JB}\\&=\overrightarrow{IJ}^2-\overrightarrow{JB}^2\\&=a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\\&=\frac{3}{4}a^2\end{aligned}$$

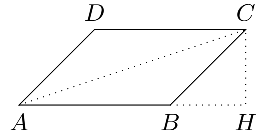
Soient maintenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

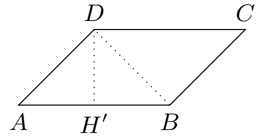
3.12.2 On démontre la formule qui porte le nom d'*identité du parallélogramme* :

$$\begin{aligned}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2&=(\vec{u}+\vec{v})^2+(\vec{u}-\vec{v})^2\\&=\vec{u}^2+\vec{v}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}^2+\vec{v}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}\\&=2\vec{u}^2+2\vec{v}^2\\&=2\|\vec{u}\|^2+2\|\vec{v}\|^2\end{aligned}$$

Soit $ABCD$ un parallélogramme.







Soit $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$. Alors $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ est un vecteur directeur de la diagonale (AC) et $\vec{u}-\vec{v}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$ est un vecteur directeur de la diagonale (BD).

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ car $ABCD$ est un parallélogramme. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.

Donc $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\overrightarrow{AC}\|^2+\|\overrightarrow{DB}\|^2=AC^2+DB^2$.

Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB). Puisque le triangle ACH est rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, on a $AC^2=AH^2+CH^2$.

Soit H' le projeté orthogonal de D sur (AB). Puisque le triangle BDH' est rectangle en H', d'après le théorème de Pythagore, on a $BD^2=DH'^2+H'B^2$.

D'où

$$\begin{aligned}
AC^2 + DB^2 &= AH^2 + CH^2 + DH'^2 + H'B^2 \\
&= (AB + BH)^2 + DH'^2 + DH'^2 + (AB - AH')^2 \text{ car } CH = DH' \\
&= AB^2 + BH^2 + 2AB \times BH + 2DH'^2 + AB^2 + AH'^2 - 2AB \times AH' + AH'^2 \\
&= 2AB^2 + 2AH'^2 + 2DH'^2 \text{ car } AH' = BH \text{ entraîne } 2AB \times BH - 2AB \times AH' = 0
\end{aligned}$$

Justification de $AH' = BH$: le triangle $AH'D$ étant rectangle en H', d'après le théorème de Pythagore, $AH'^2 = AD^2 - DH'^2$; comme $ABCD$ est un parallélogramme, $AD = BC$ et comme $DH' = CH$, on a $AH'^2 = BC^2 - CH^2 = BH^2$ car le triangle BHC est rectangle en H.

$$\begin{aligned}
&= 2AB^2 + 2(AH'^2 + DH'^2) \\
&= 2AB^2 + 2AD^2 \text{ car le triangle } AH'D \text{ étant rectangle en } H',\ AH'^2 + DH'^2 = AD^2
\end{aligned}$$

3.12.3 On a

$$\begin{aligned}
\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v})^2 - (\vec{u} - \vec{v})^2 \\
&= \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - (\vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}) \\
&= 4\vec{u} \cdot \vec{v} \\
\vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)
\end{aligned}$$

3.12.4 Puisque $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.
Soit $ABCD$ un parallélogramme. On applique cette formule à $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ pour calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}(7^2 - 4^2 - 5^2) \\
&= \frac{1}{2}(49 - 16 - 25) \\
&= \frac{1}{2} \times 8 \\
&= 4
\end{aligned}$$

3.12.5 Puisque $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{2}\left(\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.

3.12.6 Les propositions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned}
(\vec{u} \perp \vec{v}) \\
\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\
\frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = 0 \text{ d'après } \mathbf{3.12.4} \\
\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0 \\
\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2
\end{aligned}$$

3.12.7 Les propositions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned}
(\vec{u} \perp \vec{v}) \\
\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\
-\frac{1}{2}\left(\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = 0 \text{ d'après } \mathbf{3.12.5} \\
\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0 \\
\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2
\end{aligned}$$

On a donc démontré le théorème de Pythagore : $(\vec{u} \perp \vec{v}) \Leftrightarrow (\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$.

4.2 Mini-exercices

On se place dans un repère orthonormé.

4.2.1 Déterminer un vecteur directeur puis un vecteur normal à la droite $\mathscr{D}\ : 3x + 2y - 1 = 0$.

4.2.2 Déterminer tous les vecteurs normaux à une droite $\mathscr{D}\ : ax + by + c = 0$.

RÉPONSE

4.2.1 Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $3x + 2y - 1 = 0$.
Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est $\vec{u}(-2,\, 3)$.
Un vecteur $\vec{n}(a,\, b)$ normal à $\mathscr{D}$ est tel que $-2a + 3b = 0$.
Par exemple $a = 3$ et $b = 2$ conviennent puisque $-2 \times 3 + 3 \times 2 = 0$. D'où $\vec{n}(3,\, 2)$.

4.2.2 Soit $\mathscr{D}$ une droite d'équation $ax + by + c = 0$.
Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est $\vec{n}(-b,\, a)$.
Soit $\vec{n}(n_1,\, n_2)$ un vecteur.
$\vec{n}$ est normal à $\mathscr{D}$ si et seulement si $\vec{n} \perp \vec{u}$ c'est-à-dire $-bn_1 + an_2 = 0$ puis $bn_1 = an_2$.
On peut supposer que $b \neq 0$ puisque $\vec{u}$ n'étant pas nul, l'une au moins de ses composantes n'est pas nulle. D'où $n_1 = \frac{a}{b}n_2$.
Ainsi $\vec{n}\left(\frac{a}{b}n_2,\, n_2\right) = n_2\left(\frac{a}{b},\, 1\right)$.
On peut supposer que $n_2 \neq 0$ puisque $\vec{n}$ n'étant pas nul, l'une au moins de ses composantes n'est pas nulle.
Les vecteurs normaux à $\mathscr{D}$ sont donc les vecteurs non nuls qui sont colinéaires au vecteur de coordonnées $\left(\frac{a}{b},\, 1\right)$.

4.4 Mini-exercices

On se place dans un repère orthonormé.

4.4.1 Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par le point $A(2,\,6)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-1,\,-1)$. Déterminer une équation de $\mathscr{D}$.

4.4.2 Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $3x+2y-1=0$. Déterminer une équation de la perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par $A(-1,\,5)$.

RÉPONSE

4.4.1 Soit $M(x,\,y)$ un point du plan. $\overrightarrow{AM}(x-2,\,y-6)$.

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{D} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)\times(-1)+(y-6)\times(-1)=0 \\ &\Leftrightarrow -x-y+2+6=0 \\ &\Leftrightarrow -x-y+8=0 \end{aligned}$$

4.4.2 Soit Δ la perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par $A(-1,\,5)$. Un vecteur normal $\vec{n}$ à Δ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. On peut prendre $\vec{n}(-2,\,3)$.
Soit M un point du plan. $\overrightarrow{AM}(x+1,\,y-5)$.

$$\begin{aligned} M \in \Delta &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)\times(-2)+(y-5)\times 3=0 \\ &\Leftrightarrow -2x+3y-2-15=0 \\ &\Leftrightarrow -2x+3y-17=0 \end{aligned}$$

4.6 Mini-exercices

On se place dans un repère orthonormé. Soient $A(1,\, 2)$, $B(4,\, -1)$ et $C(2,\, 4)$.

4.6.1 Déterminer une équation de la hauteur du triangle ABC issue de A.

4.6.2 Déterminer une équation de la médiatrice du triangle ABC relative au côté $[A,\, C]$.

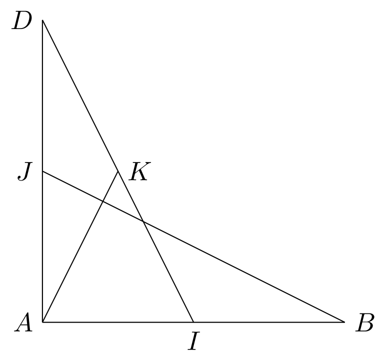
RÉPONSE

4.6.1 La hauteur $\mathscr{H}$ du triangle ABC issue de A est la perpendiculaire à la droite (BC) passant par A.
Un vecteur directeur de (BC) est $\overrightarrow{BC}(2-4,\, 4+1) = (-2,\, 5)$. Il est normal à $\mathscr{H}$.
Donc une équation de $\mathscr{H}$ est $-2x + 5y + c = 0$, $c \in \mathbb{R}$.
Puisque $\mathscr{H}$ passe par A, on a $-2 \times 1 + 5 \times 2 + c = 0$ ce qui donne $c = 2 - 10 = -8$.
Donc une équation de $\mathscr{H}$ est $-2x + 5y - 8 = 0$.

4.6.2 La médiatrice $\mathscr{M}$ du triangle ABC relative au côté $[A,\, C]$ est la perpendiculaire à la droite (AC) passant par le milieu I de $[A,\, C]$.
Un vecteur directeur de (AC) est $\overrightarrow{AC}(2-1,\, 4-2) = (1,\, 2)$. Il est normal à $\mathscr{M}$.
Donc une équation de $\mathscr{M}$ est $1x + 2y + c = 0$, $c \in \mathbb{R}$.
Puisque $\mathscr{M}$ passe par I et que ses coordonnées sont $\left(\frac{1+2}{2},\, \frac{2+4}{2}\right) = \left(\frac{3}{2},\, 3\right)$, on a $\frac{3}{2} + 2 \times 3 + c = 0$ ce qui donne $c = -\frac{3}{2} - 6 = -\frac{15}{2}$.
Donc une équation de $\mathscr{M}$ est $x + 2y - \frac{15}{2} = 0$.

4.8 Exercice

Soient ABD un triangle rectangle et isocèle en A, I, J et K les milieux respectifs des segments $[A,\, B]$, $[A,\, D]$ et $[I,\, D]$. On note a la longueur commune aux côtés $[A,\, B]$ et $[A,\, D]$.



Démontrer que les droites (AK) et (BJ) sont perpendiculaires.

RÉPONSE

1re méthode : à l'aide du produit scalaire, sans repère

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BJ} &= (\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{JK})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AJ})\\ &= \overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{JK}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{JK}\cdot\overrightarrow{AJ}\\ &= 0+AJ^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BA}+0\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BA}=0$ car ABD étant rectangle en A, les droites (AB) et (AJ) sont perpendiculaires

$\overrightarrow{JK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AI}$ par application du théorème des milieux dans AID où J et K sont les milieux respectifs de $[A,\, D]$ et $[I,\, D]$

$\overrightarrow{JK}\cdot\overrightarrow{AJ}=0$ car $(JK)//(AI)$ et $(AI)\perp(AJ)$ entraînent $(JK)\perp(AJ)$

$$\begin{aligned}&= \left(\frac{1}{2}a\right)^2-\frac{1}{2}AI\times BA\\ &= \frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}AB\times AB\\ &= \frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}a^2\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc les droites (AK) et (BJ) sont perpendiculaires.

Variante de la 1re méthode

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BJ} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AD})\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}) \text{ car } K \text{ et } J \text{ sont les milieux respectifs de } [I,\, D] \text{ et } [A,\, D]\\ &= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}\cdot+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BA}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}AB^2-\frac{1}{2}AB^2+AD^2+0\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc les droites (AK) et (BJ) sont perpendiculaires.

2e méthode : à l'aide du produit scalaire, avec un repère

On se place dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD})$. Puisque ABD est un triangle rectangle et isocèle, ce repère est orthonormé.
Coordonnées des points A, B, D, I, J et K.
$A(0,\,0)$, $B(1,\,0)$, $D(0,\,1)$.
Puisque I est le milieu de $[A,\, B]$, ses coordonnées sont $\left(\frac{1}{2},\,0\right)$.

Puisque J est le milieu de $[A,\, D]$, ses coordonnées sont $\left(0,\, \frac{1}{2}\right)$.
Puisque K est le milieu de $[I,\, D]$, ses coordonnées sont $\left(\frac{\frac{1}{2}}{2},\, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4},\, \frac{1}{2}\right)$.
Composantes des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{BJ}$: $\overrightarrow{AK}\left(\frac{1}{4},\, \frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{BJ}\left(-1,\, \frac{1}{2}\right)$.
On a $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\times(-1) + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 0$.
Donc les droites (AK) et (BJ) sont perpendiculaires.

3e méthode : sans le produit scalaire, à l'aide des théorèmes de Thalès et de Pythagore, on démontre que le triangle OJK est rectangle en O où O est le point d'intersection des droites (AK) et (JB).

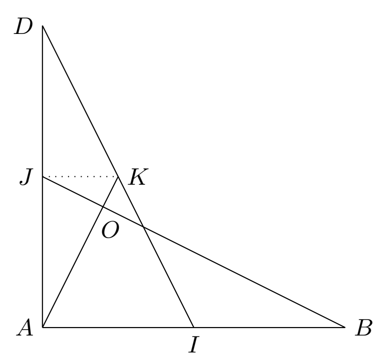
Dans le triangle AID, les points J et K sont les milieux respectifs des segments $[A,\, D]$ et $[A,\, B]$. Donc d'après le théorème des milieux, les droites (JK) et (AI) sont parallèles.
Dans le triangle AOB, les points A, O et K sont alignés ainsi que les points B, O et J. D'après le théorème de Thalès, on a $\frac{OJ}{OB} = \frac{OK}{OA} = \frac{JK}{AB}$.
Dans le triangle AID, d'après le théorème des milieux $JK = \frac{1}{2}AI$ et comme I est de milieu de $[A,\, B]$, $AI = \frac{1}{2}AB$ et donc $JK = \frac{1}{4}AB$.
D'où $JK^2 = \frac{1}{16}AB^2$, $OJ = \frac{1}{4}OB$ et $OK = \frac{1}{4}OA$.
Puisque $JB = OJ + OB$, on a $OJ = JB - OB = JB - 4OJ$ puis $5OJ = JB$ et enfin $OJ = \frac{1}{5}JB$.
De même $OK = \frac{1}{5}KA$.
Puisque K est le milieu de $[I,\, D]$ et que AID est rectangle en A, $KA = KI$. Donc $OK = \frac{1}{5}KI$ puis $OK = \frac{1}{5}\times\frac{1}{2}DI = \frac{1}{10}DI$ car K est le milieu de $[I,\, D]$.
D'où

$$\begin{aligned}
OJ^2 + OK^2 &= \frac{1}{25}JB^2 + \frac{1}{100}DI^2 \\
&= \frac{1}{25}(AJ^2 + AB^2) + \frac{1}{100}(AD^2 + AI^2) \text{ car les triangles } ABJ \text{ et } AID \text{ sont rectangles en } A \\
&= \frac{1}{25}\left(\frac{1}{4}AD^2 + AB^2\right) + \frac{1}{100}\left(AD^2 + \frac{1}{4}AB^2\right) \text{ car } J \text{ étant le milieu de } [A,\, D],\ AJ = \frac{1}{2}AD \\
&= \frac{1}{25}\times\frac{5}{4}AB^2 + \frac{1}{100}\times\frac{5}{4}AB^2 \text{ car } ABD \text{ étant isocèle en } A,\ AB = AD \\
&= \frac{1}{20}AB^2 + \frac{1}{80}AB^2 \\
&= \frac{5}{80}AB^2 \\
&= \frac{1}{16}AB^2
\end{aligned}$$

Puisque $JK^2 = \frac{1}{16}AB^2$, on en déduit que $OJ^2 + OK^2 = JK^2$. Donc le triangle OJK est rectangle en O. Donc (OK) et (OJ) sont perpendiculaires. Comme $(OK) = (AK)$ et $(OJ) = (BJ)$, les droites (AK) et (BJ) sont perpendiculaires.

4e méthode : sans le produit scalaire, à l'aide de la notion de mesure de secteurs, on démontre que mes$(\widehat{KOJ})$=90

Fait l'objet d'une recherche en cours… en cherchant bien, on trouve !



Soit toujours O le point d'intersection des droites (AK) et (JB). Pour démontrer que ces droites sont perpendiculaires, il suffit de démontrer que $\text{mes}(\widehat{OKJ}) + \text{mes}(\widehat{OJK}) = 90$ car alors $\text{mes}(\widehat{KOJ}) = 180 - 90 = 90$ et l'affaire est close.

Dans le triangle AID, puisque J et K sont les milieux respectifs des côtés $[A,\, D]$ et $[I,\, D]$, on peut appliquer le théorème des milieux. D'après celui-ci, les droites (JK) et (AI) sont parallèles.

Considérant la droite (AK) qui coupe (JK) et (AI), les secteurs alternes-internes $(\widehat{OKJ})$ et $(\widehat{KAI})$ ont la même mesure.

Puisque ADI est rectangle en A et que K est le milieu de $[I,\, D]$, les segments $[A,\, K]$ et $[K,\, I]$ ont la même longueur ce qui entraîne que AKI est isocèle en K puis que les secteurs $(\widehat{KAI})$ et $(\widehat{AIK}) = (\widehat{AID})$ ont la même mesure. D'où $\boxed{\text{mes}(\widehat{OKJ}) = \text{mes}(\widehat{AID})}$.

Considérant la droite (BJ) qui coupe (JK) et (AB), les secteurs alternes-internes $(\widehat{OJK})$ et $(\widehat{ABJ})$ ont la même mesure.

Puisque le triangle ABJ est rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, $BJ^2 = AJ^2 + AB^2$. Puisque J et K sont les milieux respectifs des côtés $[A, D]$ et $[I, D]$ et que $AB = AD$, on a $AJ = AI$ ce qui entraîne $BJ^2 = AI^2 + AD^2$.

Puisque le triangle ADI est rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, $DI^2 = AI^2 + AD^2$. D'où $BJ^2 = DI^2$ puis $BJ = DI$.

Dans le triangle ABJ rectangle en A, on a $\cos\widehat{ABJ} = \frac{AB}{BJ}$. Dans le triangle ADI rectangle en A, on a $\cos\widehat{ADI} = \frac{AD}{DI}$. Comme $AB = AD$ et que $BJ = DI$, on a $\cos\widehat{ABJ} = \cos\widehat{ADI}$ et donc les secteurs $(\widehat{ABJ})$ et $(\widehat{ADI})$ ont la même mesure. D'où $\boxed{\text{mes}(\widehat{OJK}) = \text{mes}(\widehat{ADI})}$.

Puisque le triangle ADI est rectangle en A, on a $\text{mes}(\widehat{AID}) + \text{mes}(\widehat{ADI}) = 90$.

D'après les deux égalités encadrées, on a $\text{mes}(\widehat{OKJ}) + \text{mes}(\widehat{OJK}) = 90$. On en déduit que les droites (AK) et (BJ) sont perpendiculaires.

5.3 Mini-exercice

On se place dans un repère orthonormé.

5.3.1 Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $K(1,\, 2)$ et de rayon 2.

5.3.2 L'équation $x^2 + y^2 - x - 3y + 3 = 0$ est-elle celle d'un cercle ?

RÉPONSE

5.3.1 Une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $K(1,\, 2)$ et de rayon 2 est $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$.

5.3.2 On considère l'équation $x^2 + y^2 - x - 3y + 3 = 0$.
Les équations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} x^2 - x + y^2 - 3y + 3 &= 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 3 &= 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{10}{4} + \frac{12}{4} &= 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Dans $\mathbb{R}$, cette égalité n'est jamais vérifiée puisque $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 \geqslant 0$ et $\frac{1}{2} > 0$ entraîne $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$.
L'équation $x^2 + y^2 - 3y + 3 = 0$ n'est donc pas celle d'un cercle.

5.5 Mini-exercice

On se place dans un repère orthonormé. Soient $A(-1,\, 3)$ et $B(2,\, 2)$.

5.5.1 Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[A,\, B]$.

5.5.2 À partir de cette équation, déterminer le centre et le rayon du cercle.

RÉPONSE

Soient $A(-1,\, 3)$ et $B(2,\, 2)$.

5.5.1 Soit M un point du plan de coordonnées $(x,\, y)$. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[A,\, B]$.
On a $\overrightarrow{MA}(-1-x,\, 3-y)$ et $\overrightarrow{MB}(2-x,\, 2-y)$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} M &\in \mathscr{C} \\ \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} &= 0 \\ (1-x)\times(2-x)+(3-y)\times(2-y) &= 0 \\ -2+x-2x+x^2+6-3y-2y+y^2 &= 0 \\ x^2-x+y^2-5y+4 &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que $x^2-x+y^2-5y+4=0$ est une équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[A,\, B]$.

5.5.2 On considère l'équation $x^2-x+y^2-5y+4=0$.
Les équations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} x^2-x+y^2-5y+4=0 &= 0 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+4 &= 0 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{26}{4}+\frac{16}{4} &= 0 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{10}{4} &= 0 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2 &= \frac{10}{4} \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

On en déduit que le centre et le rayon du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[A,\, B]$ sont respectivement le point $\Omega\left(\frac{1}{2},\, \frac{5}{2}\right)$ et le réel $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

6.3 Mini-exercice

Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 3$ et $BC = 5$. Calculer la longueur de la médiane de ABC issue de C.

RÉPONSE

Au vu des données, c'est la formule « soient $[A, B]$ un segment et I son milieu ; pour tout point M, $MA^2+MB^2 = 2MI^2+\frac{AB^2}{2}$ » qui doit être utilisée pour calculer la longueur de la médiane de ABC issue de C.

On l'applique en prenant $M = C$. Alors

$$\begin{aligned}
CB^2 + CA^2 &= 2CI^2 + \frac{AB^2}{2} \\
25 + 9 &= 2CI^2 + \frac{36}{2} \\
CI^2 &= \frac{34 - 18}{2} \\
CI^2 &= 8 \\
CI &= 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

6.6 Mini-exercice

Soit ABC un triangle tel que $AB = 12$, $AC = 8$ et $BC = 10$. Calculer la mesure de $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

RÉPONSE

Pour calculer la mesure de $\widehat{A}$, on prend $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$ avec $a = BC = 10$, $b = AC = 8$ et $c = AB = 12$.
D'où $\cos\widehat{A} = (a^2 - b^2 - c^2) \times \frac{-1}{2bc}$ puis

$$\begin{aligned}\cos\widehat{A} &= (100 - 64 - 144) \times \frac{-1}{2 \times 8 \times 12}\\ &= -108 \times \frac{-1}{2 \times 8 \times 12}\\ &= \frac{9 \times 4 \times 3}{4 \times 2 \times 2 \times 3 \times 4}\\ &= \frac{9}{16}\end{aligned}$$

D'où : mes$\widehat{A} \simeq 55{,}77°$, arrondi au centième.
On calcule de même $\cos\widehat{B} = \frac{64-100-144}{-2\times10\times12} = \frac{3}{4}$ et $\cos\widehat{C} = \frac{144-100-64}{-2\times10\times8} = \frac{1}{8}$.
Cela donne mes $\widehat{B} \simeq 41{,}41°$ et mes $\widehat{C} \simeq 82{,}82°$, arrondis au centième.

6.8 Mini-exercice

Calculer l'aire du triangle ABC du mini-exercice 6.6.

RÉPONSE

En prenant $\widehat{A}$ tel que $\cos \widehat{A} = \frac{9}{16}$, on a $\mathscr{A} = \frac{1}{2} \times 8 \times 12 \sin \widehat{A} = 48 \sin \widehat{A}$.

Pour éviter des erreurs d'arrondis, mieux vaut taper à la calculatrice `sin(cos⁻¹(9/16))` pour calculer $\sin \widehat{A}$ ce qui donne $\simeq 39{,}69$ arrondi au centième puisque la calculatrice affiche `39.68626967`.

En tapant `48 * sin(55,77)`, on obtient `39.68`<u>`573543`</u> ce qui s'éloigne du résultat à partir de la 5e décimale (on a souligné les décimales qui ne sont pas les mêmes).

7.1 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

7.1.1 Démontrer que $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

7.1.2 Pour quels vecteurs y a-t-il égalité ?

RÉPONSE

7.1.1
- Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors $|\vec{u}\cdot\vec{v}|=0$ et $\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|=0$.
  On en déduit que $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.
- Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$ alors comme $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos\left(\widehat{MON}\right)$ et que $-1\leqslant\cos\left(\widehat{MON}\right)\leqslant 1$,
  on a $-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos\left(\widehat{MON}\right) \leqslant \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$
  puis $-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| \leqslant \vec{u}\cdot\vec{v} \leqslant \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$
  et enfin $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.

7.1.2 L'égalité $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$ entraîne $\cos\left(\widehat{MON}\right)=-1$ ou $\cos\left(\widehat{MON}\right)=1$.

$\left(\widehat{MON}\right)$ est donc le secteur plat ou le secteur nul. Il en résulte que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Ayant raisonné par disjonction des cas, $(|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|) \Leftrightarrow$ ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires).

Autre façon de procéder

7.1.1 On considère le polynôme $P\ :\lambda\mapsto(\vec{u}+\lambda\vec{v})^2=\|\vec{v}\|^2\lambda^2+2\lambda\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{u}\|^2$.
- Si $\|\vec{v}\|=0$ alors $\vec{v}=\vec{0}$ puis $|\vec{u}\cdot\vec{v}|=0=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.
- Si $\|\vec{v}\|\neq 0$ alors P a pour degré 2.
  On a

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \|\vec{v}\|^2\left(\lambda^2+\frac{2\lambda\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}+\frac{\|\vec{u}\|^2}{\|\vec{v}\|^2}\right)\\
&= \|\vec{v}\|^2\left(\left(\lambda+\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right)^2-\frac{(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}{\|\vec{v}\|^4}+\frac{\|\vec{u}\|^2}{\|\vec{v}\|^2}\right)\\
&= \|\vec{v}\|^2\left(\left(\lambda+\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right)^2-\frac{(\vec{u}\cdot\vec{v})^2-\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2}{\|\vec{v}\|^4}\right)
\end{aligned}$$

  Puisque $P(\lambda)$ est le carré scalaire de $\vec{u}+\lambda\vec{v}$, $P(\lambda)\geqslant 0$.
  Donc $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2-\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2\leqslant 0$.
  Donc $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2\leqslant\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2$ et enfin $|\vec{u}\cdot\vec{v}|\leqslant\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.

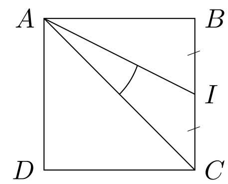
7.1.2 Lorsque $|\vec{u}\cdot\vec{v}|=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$, $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2-\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2=0$.
Dans ce cas, le discriminant de P qui est $4(\vec{u}\cdot\vec{v})^2-4\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2$, est nul. Cela entraîne que P admet une racine double $\lambda_0=-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$.

D'où $P(\lambda_0)=0$ c'est-à-dire $\left(\vec{u}-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}\right)^2=0$ ce qui entraîne $\vec{u}-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}=\vec{0}$ puis $\vec{u}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires
- de même sens si $\vec{u}\cdot\vec{v}\geqslant 0$;
- de sens contraire si $\vec{u}\cdot\vec{v}\leqslant 0$.

Ayant raisonné par disjonction des cas, $(|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|) \Leftrightarrow$ ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires).

Remarque
Le carré « $(\vec{u}+\lambda\vec{v})^2$ » n'est pas le carré d'un nombre réel, c'est le carré scalaire du vecteur $\vec{u}+\lambda\vec{v}$. De cela, il résulte que lorsque l'on calcule la forme canonique de
$P\ :\lambda\mapsto(\vec{u}+\lambda\vec{v})^2=\|\vec{v}\|^2\lambda^2+2\lambda\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{u}\|^2$, le quotient $\frac{(\vec{u}\cdot\vec{v})^2-\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2}{\|\vec{v}\|^4}$ n'est pas toujours égal à 0, contrairement à ce qui se produit lorsque l'on calcule la forme canonique de $(x+\lambda y)^2$ avec x *et* y *réels.*

7.2 Soient $ABCD$ un carré de côté a et I le milieu de $[B,\, C]$.



7.2.1 Calculer AI et AC.

7.2.2 Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

7.2.3 Calculer $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC}$ de deux façons différentes.

7.2.4 En déduire une mesure de $\widehat{IAC}$.

RÉPONSE

7.2.1 D'après le théorème de Pythagore

— appliqué au triangle ABI rectangle en B, on a
$AI = \sqrt{AB^2 + BI^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$;

— appliqué au triangle ABC rectangle en B, on a
$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

7.2.2 On a $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ puisque, I étant le milieu de $[A,\, B]$, $\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{0}$. Donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

7.2.3 D'une part,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC} &= AI \times AC \times \cos\widehat{IAC} \\
&= \frac{a\sqrt{5}}{2} \times a\sqrt{2} \times \cos\widehat{IAC} \\
&= a^2 \times \frac{\sqrt{10}}{2} \times \cos\widehat{IAC}
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(AB \times AB + AC^2\right) \\
&= \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2) \\
&= \frac{1}{2}(a^2 + 2a^2) \\
&= \frac{3}{2}a^2
\end{aligned}$$

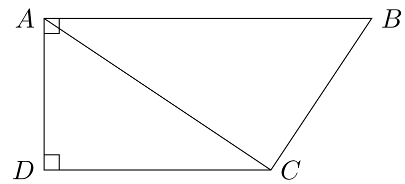
7.2.4 On en déduit que

$$\begin{aligned}
a^2 \times \frac{\sqrt{10}}{2} \times \cos\widehat{IAC} &= \frac{3}{2}a^2 \\
\cos\widehat{IAC} &= \frac{3}{2}a^2 \times \frac{1}{a^2} \times \frac{2}{\sqrt{10}} \\
\cos\widehat{IAC} &= \frac{3}{\sqrt{10}}
\end{aligned}$$

On en déduit que mes $\widehat{IAC} \simeq 18{,}43^\circ$, arrondi à 10^{-2} près.

7.3 Soit $ABCD$ un trapèze rectangle tel que la diagonale (AC) est perpendiculaire à (BC).

7.3.1 Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ de deux façons différentes.



7.3.2 En déduire que $AC^2 = AB \times CD$.

RÉPONSE

7.3.1 Le projeté orthogonal de B sur (AC) est C. Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AC \times AC = AC^2$.
Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB). Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$.

7.3.2 D'après la question précédente, $AC^2 = AB \times AH$.
Puisque $ABCD$ est un trapèze rectangle, $ADCH$ est un rectangle. Donc $AH = DC$ puis $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times DC$.
On en déduit que $AC^2 = AB \times CD$.

7.4 Soient A, B, C et D quatre points. Déterminer et construire les ensembles de points suivants :

7.4.1 $\mathscr{E}_1 = \left\{M \in P \ : \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\right) = 0\right\}$;

7.4.2 $\mathscr{E}_2 = \left\{M \in P \ : \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right) = 0\right\}$;

7.4.3 $\mathscr{E}_3 = \left\{M \in P \ : \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\|\right\}$.

RÉPONSE

7.4.1 Soit $\mathscr{E}_1 = \left\{M \in P \ : \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\right) = 0\right\}$.
Soit I le milieu de $[A, B]$.
On a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{DC}$.
Donc $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}) = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{DC}$
Donc $(M \in \mathscr{E}_1) \Leftrightarrow (2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{DC} = 0) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{DC} = 0)$.
$\mathscr{E}_1$ est donc la perpendiculaire à la droite (DC) passant par I.

7.4.2 Soit $\mathscr{E}_2 = \left\{M \in P \ : \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right) = 0\right\}$.
Soit J le milieu de $[C, D]$.
On a $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MJ}$.
Donc $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 2\overrightarrow{MI} \cdot 2\overrightarrow{MJ}$
Donc $(M \in \mathscr{E}_2) \Leftrightarrow (2\overrightarrow{MI} \cdot 2\overrightarrow{MJ} = 0) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0)$.
$\mathscr{E}_2$ est donc le cercle de diamètre $[I, J]$.

7.4.3 Soit $\mathscr{E}_3 = \left\{M \in P \ : \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\|\right\}$.
On a $(M \in \mathscr{E}_3) \Leftrightarrow \left(\left\|2\overrightarrow{MI}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MJ}\right\|\right) \Leftrightarrow \left(2\left\|\overrightarrow{MI}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MJ}\right\|\right) \Leftrightarrow (MI = MJ)$.
$\mathscr{E}_3$ est donc la médiatrice du segment $[I, J]$.

7.5 Soient (AC) et (BD) deux droites perpendiculaires.
En décomposant $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, démontrer que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

RÉPONSE

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC})\\
&= \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}\\
&= \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}\\
&= \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}\cdot(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})\\
&= 0+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA}\\
&= 0 \text{ car les droites } (DB) \text{ et } (CA) \text{ sont perpendiculaires}
\end{aligned}$$

7.6 Soient ABC un triangle, O le centre du cercle circonscrit à ABC et H le point tel que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

7.6.1 Exprimer $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ puis calculer $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$.

7.6.2 Procéder de même avec $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AC}$.

7.6.3 En déduire que H est l'orthocentre de ABC.

RÉPONSE

7.6.1 $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ puisque $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ entraîne $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$
Donc $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) = OC^2 - OB^2 = 0$ puisque, O étant le centre du cercle circonscrit à ABC, on a $OC = OB$.

7.6.2 $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ puisque $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ entraîne $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$
Donc $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = OC^2 - OA^2 = 0$ puisque, O étant le centre du cercle circonscrit à ABC, on a $OC = OA$.

7.6.3 Puisque $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, la droite (AH) est la perpendiculaire à (BC) passant par A. On en déduit que (AH) est la hauteur de ABC issue de A.
Puisque $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, la droite (BH) est la perpendiculaire à (AC) passant par B. On en déduit que (BH) est la hauteur de ABC issue de B.
Comme le point H est commun à ces deux droites, H est l'orthocentre de ABC.

7.7 Soient $ABCD$ un quadrilatère convexe.

7.7.1 Démontrer que $AB^2 - BC^2 + CD^2 - AD^2 = 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$.

7.7.2 En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que les diagonales de $ABCD$ soient orthogonales.

RÉPONSE

7.7.1 On a

$$\begin{aligned}
AB^2 - BC^2 + CD^2 - AD^2 &= \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{AD}^2 \\
&= (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}) \\
&= \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CA} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}) \\
&= \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}) \\
&= \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD}) \\
&= \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{BD}) \\
&= 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}
\end{aligned}$$

7.7.2 Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ sont orthogonales si, et seulement si $(AC) \perp (DB)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$ ou encore $2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$.

Donc, d'après la question précédente, les diagonales du quadrilatère $ABCD$ sont orthogonales si, et seulement si $AB^2 - BC^2 + CD^2 - AD^2 = 0$ ou encore $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

7.8 Soit ABC un triangle tel qu'une mesure du secteur $\widehat{BAC}$ est $\frac{\pi}{3}$ et $AB = 2$. Soit D le point de la demi-droite d'origine C ne contenant pas A tel que $DC = BC$.

7.8.1 Démontrer que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 4$.

7.8.2 En calculant $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$ d'une autre manière, démontrer que $AC = 4$.

7.8.3 Démontrer que $BC = 2\sqrt{3}$.

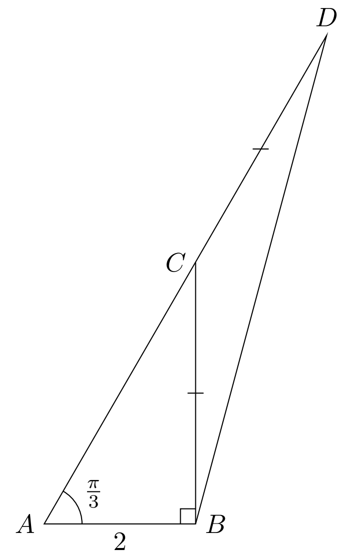
7.8.4 Déterminer une mesure des secteurs $\widehat{BCD}$ et $\widehat{DBC}$.

7.8.5 Démontrer que $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = -6\sqrt{3}$.

7.8.6 En calculant autrement $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}$, démontrer que $BD = 2\sqrt{3} \times \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

7.8.7 En calculant de deux façons différentes $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$, déterminer la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$.

7.8.8 En se plaçant dans un repère adéquate, calculer l'abscisse de D.



RÉPONSE

7.8.1 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = 4$.

7.8.2

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AC \times AB \times \cos \widehat{BAC}$$
$$AC = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{AB \times \cos \widehat{BAC}}$$
$$AC = \frac{4}{2\cos\frac{\pi}{3}}$$
$$AC = \frac{2}{\frac{1}{2}}$$
$$AC = 4$$

7.8.3 Dans le triangle ABC rectangle en B, on a $BC = 2\tan\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$.

7.8.4 Puisque D est le point de la demi-droite d'origine C ne contenant pas A, le secteur $\widehat{ACD}$ est plat. Donc mes $\widehat{ACD} = \pi$.
Puisque ABC est rectangle en B et que mes $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$, on a mes $\widehat{BCA} = \frac{\pi}{6}$.
On en déduit que mes $\widehat{BCD} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.
Puisque le triangle BCD est isocèle en C, mes $\widehat{DBC} =$ mes $\widehat{CDB}$.
Comme mes $\widehat{DBC}$ + mes $\widehat{CDB}$ + mes $\widehat{BCD} = \pi$, on a mes $\widehat{DBC} = \frac{\pi - \text{mes}\,\widehat{BCD}}{2} = \frac{\pi - \frac{5\pi}{6}}{2} = \frac{\pi}{12}$.

7.8.5 $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = CB \times CD \times \cos\widehat{BCD} = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times \cos\frac{5\pi}{6} = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -6\sqrt{3}$.

7.8.6

$$\begin{array}{rcl|l}
\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} & = & \overrightarrow{CB} \cdot \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}\right) & \\
& = & \overrightarrow{CB}^2 + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BD} & \\
& = & CB^2 - HB \times BD & \text{où } H \text{ est le projeté orthogonal de } H \text{ sur } (BD) \\
& = & 12 - \frac{1}{2} \times BD \times BD & \text{car } BCD \text{ étant isocèle, } H \text{ est le milieu de } [B,\, D] \\
-6\sqrt{3} & = & 12 - \frac{1}{2}BD^2 & \text{d'après la question précédente} \\
BD^2 & = & -2 \times (-6\sqrt{3} - 12) & \\
BD^2 & = & 2 \times (12 + 6\sqrt{3}) & \\
BD^2 & = & 2 \times (6 \times (2 + \sqrt{3})) & \\
BD^2 & = & 2 \times 2 \times 3 \times (2 + \sqrt{3}) & \\
BD & = & 2\sqrt{3} \times \sqrt{2 + \sqrt{3}} &
\end{array}$$

7.8.7 D'une part, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = BC \times BD \times \cos\widehat{DBC} = 2\sqrt{3} \times BD \times \cos\frac{\pi}{12}$.
D'autre part, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = BH \times BD = \frac{1}{2}BD^2$.

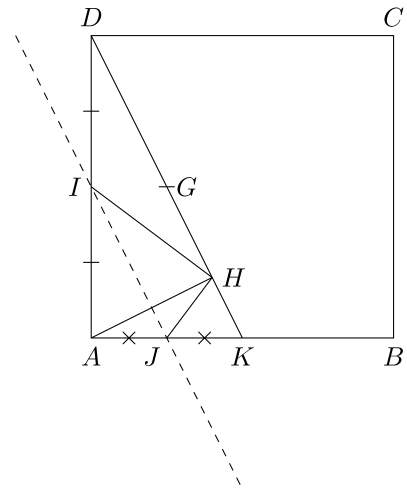
On en déduit que
$$\begin{array}{rcl}
2\sqrt{3} \times BD \times \cos\frac{\pi}{12} & = & \frac{1}{2}BD^2 \\
\cos\frac{\pi}{12} & = & \frac{BD}{4\sqrt{3}} \\
\cos\frac{\pi}{12} & = & \frac{2\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4\sqrt{3}} \\
\cos\frac{\pi}{12} & = & \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}
\end{array}$$

7.8.8 Soit I le point défini par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Soit J le point de la perpendiculaire à (AB) en I tel que J appartient au demi-plan de frontière (AB) qui contient C et $AJ = 1$. Le triplet $(A,\, \overrightarrow{AI},\, \overrightarrow{AJ})$ est un repère orthonormé.
Le couple de coordonnées de B est $(2,\, 0)$, celui de C est $(2,\, 2\sqrt{3})$.
Soient x_D et y_D les coordonnées de D.
Une équation de (AC) est $y = \sqrt{3}x$. Donc $y_D = \sqrt{3}x_D$.
Puisque $BC = CD$, on a $BC^2 = CD^2$ puis

$$\begin{array}{rcl}
(x_D-2)^2 + (\sqrt{3}x_D - 2\sqrt{3})^2 & = & 12 \\
(x_D-2)^2 + (\sqrt{3}(x_D-2))^2 & = & 12 \\
(x_D-2)^2 + 3(x_D-2)^2 & = & 12 \\
4(x_D-2)^2 & = & 12 \\
(x_D-2)^2 & = & 3 \\
x_D - 2 = \sqrt{3} & \text{ou} & x_D - 2 = -\sqrt{3} \\
x_D = \sqrt{3}+2 & \text{ou} & x_D = -\sqrt{3}+2
\end{array}$$

Seul $x_D = \sqrt{3}+2$ convient puisque $x_D > x_B = 2$.
Le couple de coordonnées de D est donc $\left(2+\sqrt{3},\, \sqrt{3}\left(2+\sqrt{3}\right)\right) = \left(2+\sqrt{3},\, 2\sqrt{3}+3\right)$.

7.9 Soit $ABCD$ un carré de coté 1.



Soient I, K et J les milieux respectifs des segments $[A,\, D]$, $[A,\, B]$ et $[A,\, K]$.

Soit H le pied de la perpendiculaire à la droite (DK) passant par A.

On veut démontrer que les droites (HI) et (HJ) sont perpendiculaires par six méthodes différentes.

7.9.1 1re méthode. Utiliser les propriétés d'un triangle rectangle.

7.9.2 2e méthode. Produit scalaire.
Démontrer que $\overrightarrow{HI} = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AD})$ et $\overrightarrow{HJ} = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AK})$ puis que $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HJ} = 0$.

7.9.3 3e méthode. Angles de couples.
On oriente le plan de façon que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AD}}\right)$ est l'angle droit direct $\widehat{\delta}$.
En repérant deux triangles isocèles dans la figure et en utilisant la caractérisation de tels triangles à l'aide d'une égalité angulaire, démontrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{HI},\, \overrightarrow{HJ}}\right) = \widehat{\delta}$.

7.9.4 4e méthode. Angles de couples bis.
On n'oriente pas le plan (ce n'est pas utile).
En utilisant la caractérisation de triangles isocèles à l'aide d'une égalité angulaire entre deux doubles d'angles, démontrer que $2\left(\widehat{\overrightarrow{HI},\, \overrightarrow{HJ}}\right) = \widehat{\pi}$.

7.9.5 5e méthode. Symétrie orthogonale.
On oriente le plan de façon que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AD}}\right)$ est l'angle droit direct $\widehat{\delta}$. Démontrer que (IJ) est la médiatrice de $[A,\, H]$, que IHJ est l'image de IAJ par une symétrie orthogonale puis que $\left(\widehat{\overrightarrow{HI},\, \overrightarrow{HJ}}\right) = \widehat{\delta}$.

7.9.6 6e méthode. Méthode des coordonnées.
On se place dans le repère orthonormé $\left(A,\, \overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AD}\right)$. Déterminer des équations de (DK) et (HA), les coordonnées de H puis démontrer que $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HJ} = 0$.

RÉPONSE

7.9.1
$$\begin{array}{rcl|l} IJ^2 & = & AI^2 + AJ^2 & \text{car } IAJ \text{ est rectangle en } A \\ IJ^2 & = & IH^2 + JH^2 & \text{car } ADH \text{ étant rectangle en } H,\ AI = IH \text{ et } AKH \text{ étant rectangle en } H,\ AJ = JH \end{array}$$
On en déduit que IJH est rectangle en H puis que (HI) et (HJ) sont perpendiculaires.

7.9.2 $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{HA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ car I est le milieu de $[A,\, D]$.
$\overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{HA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AK}$ car J est le milieu de $[A,\, K]$.
$$\begin{array}{rcl|l} \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HJ} & = & \left(\overrightarrow{HA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{HA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AK}\right) & \\ \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HJ} & = & \overrightarrow{HA}^2 + \overrightarrow{HA}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AK} & \\ \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HJ} & = & HA^2 + \overrightarrow{HA} \cdot \left(\frac{1}{2} \times 2\overrightarrow{AG}\right) + 0 & \text{car } (AD) \perp (AK) \text{ entraîne } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AK} = 0 \\ \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HJ} & = & HA^2 + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AG} & G \text{ étant le milieu de } [K,\, D],\ \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} \\ \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HJ} & = & HA^2 - HA \times AH & H \text{ est le projeté orthogonal de } G \text{ sur } (AH) \\ \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HJ} & = & 0 & \end{array}$$
On en déduit que (HI) et (HJ) sont perpendiculaires.

7.9.3 Puisque AIH est isocèle en I, $(\widehat{\overrightarrow{HI},\,\overrightarrow{HA}}) = (\widehat{\overrightarrow{AH},\,\overrightarrow{AI}})$.

Puisque AJH est isocèle en J, $(\widehat{\overrightarrow{HA},\,\overrightarrow{HJ}}) = (\widehat{\overrightarrow{AJ},\,\overrightarrow{AH}})$.

On en déduit que

$$\begin{array}{rcl} (\widehat{\overrightarrow{HI},\,\overrightarrow{HJ}}) & = & (\widehat{\overrightarrow{HI},\,\overrightarrow{HA}}) + (\widehat{\overrightarrow{HA},\,\overrightarrow{HJ}}) \\ & = & (\widehat{\overrightarrow{AH},\,\overrightarrow{AI}}) + (\widehat{\overrightarrow{AJ},\,\overrightarrow{AH}}) \\ & = & (\widehat{\overrightarrow{AJ},\,\overrightarrow{AH}}) + (\widehat{\overrightarrow{AH},\,\overrightarrow{AI}}) \\ & = & (\widehat{\overrightarrow{AJ},\,\overrightarrow{AI}}) \\ & = & \widehat{\delta} \end{array}$$

On en déduit que (HI) et (HJ) sont perpendiculaires.

7.9.4 Puisque AIH est isocèle en I, $2(\widehat{\overrightarrow{HI},\,\overrightarrow{HA}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{AH},\,\overrightarrow{AI}})$.

Puisque AJH est isocèle en J, $2(\widehat{\overrightarrow{HA},\,\overrightarrow{HJ}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{AJ},\,\overrightarrow{AH}})$.

On en déduit que

$$\begin{array}{rcl} 2(\widehat{\overrightarrow{HI},\,\overrightarrow{HJ}}) & = & 2((\widehat{\overrightarrow{HI},\,\overrightarrow{HA}}) + (\widehat{\overrightarrow{HA},\,\overrightarrow{HJ}})) \\ & = & 2(\widehat{\overrightarrow{HI},\,\overrightarrow{HA}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{HA},\,\overrightarrow{HJ}}) \\ & = & 2(\widehat{\overrightarrow{AH},\,\overrightarrow{AI}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{AJ},\,\overrightarrow{AH}}) \\ & = & 2(\widehat{\overrightarrow{AJ},\,\overrightarrow{AH}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{AH},\,\overrightarrow{AI}}) \\ & = & 2((\widehat{\overrightarrow{AJ},\,\overrightarrow{AH}}) + (\widehat{\overrightarrow{AH},\,\overrightarrow{AI}})) \\ & = & 2(\widehat{\overrightarrow{AJ},\,\overrightarrow{AI}}) \\ & = & \widehat{\pi} \end{array}$$

On en déduit que (HI) et (HJ) sont perpendiculaires.

7.9.5 AIH est isocèle en I. Donc la perpendiculaire Δ_1 à (AH) passant par I coupe $[A,\,H]$ en son milieu O.
AJH est isocèle en J. Donc la perpendiculaire Δ_2 à (AH) passant par J coupe $[A,\,H]$ en son milieu O.
Donc $\Delta_1 = \Delta_2$, que l'on note plus simplement Δ.
Soit $\mathscr{S}_\Delta$ la symétrie orthogonale d'axe Δ.

$$\mathscr{S}_\Delta \;:\; \begin{array}{ccc|l} I & \longmapsto & I & \\ A & \longmapsto & H & \text{car } (AH) \perp (IJ) \text{ et } AO = OH \\ J & \longmapsto & J & \end{array}$$

L'angle $(\widehat{\overrightarrow{AI},\,\overrightarrow{AJ}})$ est l'angle droit indirect $\widehat{\delta'}$. Son image par $\mathscr{S}_\Delta$ qui est l'angle $(\widehat{\overrightarrow{HI},\,\overrightarrow{HJ}})$ est donc l'angle droit direct $\widehat{\delta}$.

On en déduit que (HI) et (HJ) sont perpendiculaires.

7.9.6 On se place dans le repère $\left(A,\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD}\right)$.

Points	A	B	D	J	I	K
Coordonnées	$(0,\,0)$	$(1,\,0)$	$(0,\,1)$	$\left(\frac{1}{4},\,0\right)$	$\left(0,\,\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2},\,0\right)$

Une équation de (DK) est $y = \frac{0-1}{\frac{1}{2}-0}x + 1 = -2x + 1$.

Une équation de (HA) est $y = \frac{1}{2}x$ car (HA) passe par l'origine A du repère et étant perpendiculaire à (DK), son coefficient directeur a est tel que $a \times (-2) = -1$ ce qui donne $a = \frac{1}{2}$.

Puisque $\{H\} = (AH) \cap (DK)$, son abscisse x vérifie $-2x + 1 = \frac{1}{2}x$. On obtient

$$\begin{array}{rcl} \left(-2 - \frac{1}{2}\right) x & = & -1 \\ x & = & \frac{-1}{-2-\frac{1}{2}} \\ x & = & \frac{-1}{-\frac{5}{2}} \\ x & = & \frac{2}{5} \end{array}$$

Les coordonnées de H sont donc $x_H = \frac{2}{5}$ et $y_H = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{HI}$ sont $\left(0 - \frac{2}{5},\,\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \left(-\frac{2}{5},\,\frac{3}{10}\right)$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{HJ}$ sont $\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5},\,0 - \frac{1}{5}\right) = \left(-\frac{3}{20},\,-\frac{1}{5}\right)$.

$$\text{Enfin,}\quad \begin{array}{rcl} \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HJ} & = & -\frac{2}{5} \times \left(-\frac{3}{20}\right) + \frac{3}{10} \times \left(-\frac{1}{5}\right) \\ & = & \frac{2\times3}{5\times20} - \frac{3\times1}{10\times5} \\ & = & \frac{3}{5\times10} - \frac{3}{10\times5} \\ & = & 0 \end{array}$$

On en déduit que (HI) et (HJ) sont perpendiculaires.

7.10 Soient $\mathscr{C}$ un cercle de centre O, de rayon non nul et M un point qui n'appartient au disque fermé de centre O.
On considère une droite $\mathscr{D}$ qui passe par M et qui coupe $\mathscr{C}$ en deux points. On appelle P et Q les deux points d'intersection de $\mathscr{D}$ avec $\mathscr{C}$.
On note r le rayon de $\mathscr{C}$ et d la distance OM.

7.10.1 Faire un dessin.

7.10.2 Calcul de $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ}$ de deux façons différentes.

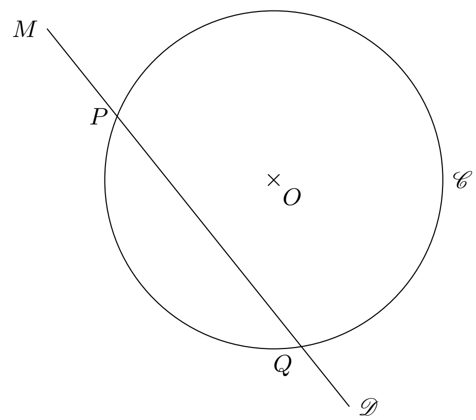
7.10.2.1 Démontrer que $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = d^2 - r^2$ en considérant le milieu I de $[P, Q]$.

7.10.2.2 Démontrer que $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = d^2 - r^2$ en considérant le diamétral de P *i.e.* le symétrique de P par rapport à O.

7.10.3 Que fait apparaître ce calcul ?

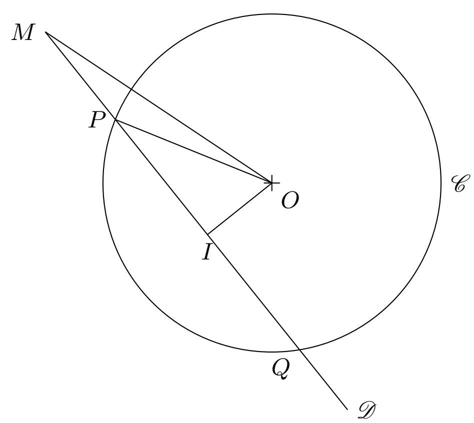
RÉPONSE

7.10.1 Dessin



7.10.2 Calcul de $\overrightarrow{MQ} \cdot \overrightarrow{MQ}$.

7.10.2.1 Dessin complété.

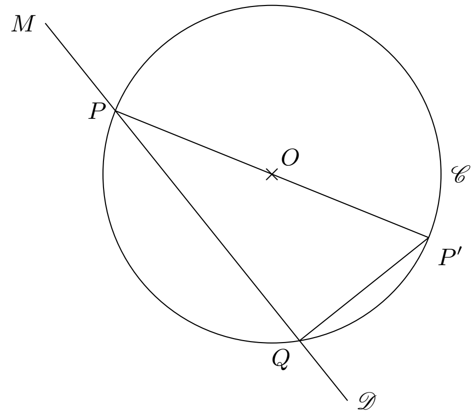


$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IP}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IQ}) \\
&= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{IP}) + \overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IQ} \\
&= MI^2 + \vec{0} + \overrightarrow{IP} \cdot (-\overrightarrow{IP}) && I \text{ étant le milieu de } [P,\, Q],\ \overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IQ} = 0 \text{ et } \overrightarrow{IQ} = -\overrightarrow{IP} \\
&= MI^2 - IP^2
\end{aligned}$$

Or, I est à égale distance de P et Q puisque I est le milieu de $[P, Q]$. Il en est de même de O puisque $P \in \mathscr{C}$, $Q \in \mathscr{C}$ et que O est le centre de $\mathscr{C}$. Comme $I \neq O$, ces deux points appartiennent à la médiatrice de $[P, Q]$, ce qui entraînent que $(OI) \perp (PQ)$. Donc les triangles OMI et OPI sont rectangles en I.
D'après le théorème de Pythagore, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} &= OM^2 - OI^2 - (OP^2 - OI^2) \\
&= OM^2 - OP^2 \\
&= d^2 - r^2
\end{aligned}$$

7.10.2.2 Dessin complété.



Soit P' le diamétral de P. Les points P, Q et P' appartenant à $\mathscr{C}$ et $[P,\, P']$ étant un diamètre de $\mathscr{C}$, le triangle $PP'Q$ est rectangle en Q. Donc $(P'Q) \perp (MP)$ et Q est le projeté orthogonal de P' sur (MP).

Le produit scalaire $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ}$ qui est le produit $MP \times MQ$ peut ainsi être *vu* comme le produit scalaire $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MP'}$. C'est le point de départ du calcul qui suit :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} &= \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MP'} \\
&= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP}) \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP'}) \\
&= MO^2 - OP^2 \\
&= d^2 - r^2
\end{aligned}$$

7.10.3 Ce résultat permet de dire que le produit scalaire $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ}$ ne dépend pas de la droite $\mathscr{D}$.

7.11 Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 6$ et $AD = 4$. Soient A' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A et C sur $[B,\, D]$.

7.11.1 Faire un dessin.

7.11.2 Démontrer que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{BD}$.

7.11.3 Démontrer que $AD^2 - AB^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

7.11.4 En déduire la valeur exacte de $A'C'$.

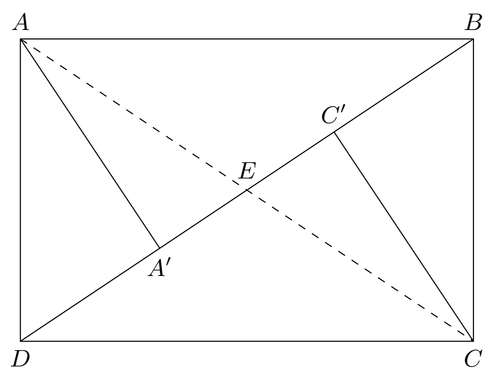
7.11.5 Autre méthode. En considérant un repère adéquate, déterminer les coordonnées de A' et C' puis calculer $A'C'$.

7.11.6 Une barre de fer de longueur $A'C'$ dont le centre est placé au milieu de $[B,\, D]$ peut-elle tourner autour de l'axe passant par ce milieu et perpendiculaire au plan du rectangle sans rencontrer les côtés $[A,\, B]$ et $[C,\, D]$?

7.11.7 Calculer la distance du point D à la droite (AA').

RÉPONSE

7.11.1 Dessin



7.11.2

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C}) \cdot \overrightarrow{BD} \\
&= \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{BD} \\
&= \overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{BD} \text{ car } A' \text{ étant le projeté orthogonal de } A \text{ sur } [B,\, D],\ \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \\
&= (\overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{CC'}) \cdot \overrightarrow{BD} \\
&= \overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{BD} \\
&= \overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{BD} \text{ car } C' \text{ étant le projeté orthogonal de } C \text{ sur } [B,\, D],\ \overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{BD} = 0
\end{aligned}$$

7.11.3

$$\begin{aligned}
AD^2 - AB^2 &= \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AB}^2 \\
&= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \\
&= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} \text{ car } ABCD \text{ étant un parallélogramme, } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

7.11.4 On en déduit que $\overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{BD} = AD^2 - AB^2 = 16 - 36 = -20$.
Comme $\overrightarrow{A'C'}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires et de sens contraire, $\overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{BD} = -A'C' \times BD$.
D'où $-A'C' \times BD = -20$ puis $A'C' = \frac{20}{BD}$.
Puisque DAB est rectangle en A, on a $BD = \sqrt{DA^2 + AB^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = \sqrt{4 \times 13} = 2\sqrt{13}$.
Enfin $A'C' = \frac{20}{2\sqrt{13}} = \frac{10}{\sqrt{13}} = \frac{10\sqrt{13}}{13}$.

7.11.5 On considère le repère $(O,\, \vec{u},\, \vec{v})$ où $\vec{u} = \frac{1}{DC}\overrightarrow{DC}$ et $\frac{1}{DA}\overrightarrow{DA}$. Il s'agit de deux vecteurs unitaires et orthogonaux. Ce repère est donc orthonormé.
$(BD)\ : y = \frac{4}{6}x = \frac{2}{3}x$.
Puisque $(DB) \perp (AA')$, une équation de (AA') est $y = -\frac{3}{2}x + 4$ (4 est l'ordonnée à l'origine de (AA') car (AA') passe par A, point d'intersection de (AA') avec la droite des ordonnées).
Les coordonnées de A' sont solutions du système $\left\{ \begin{array}{lcl} y & = & \frac{2}{3}x \\ y & = & -\frac{3}{2}x + 4 \end{array} \right.$. On trouve $x = \frac{24}{13}$ et $y = \frac{16}{13}$.
Puisque $(DB) \perp (CC')$, une équation de (CC') est $y = -\frac{3}{2}x + b$. Puisque (CC') passe par $C(6,\, 0)$, on a $b = 9$ et donc $y = -\frac{3}{2}x + 9$.

Les coordonnées de C' sont solutions du système $\left\{\begin{array}{lcl} y & = & \frac{2}{3}x \\ y & = & -\frac{3}{3}x+9 \end{array}\right.$. On trouve $x=\frac{54}{13}$ et $y=\frac{36}{13}$.

D'où $A'C' = \sqrt{\left(\frac{54}{13}-\frac{24}{13}\right)^2+\left(\frac{36}{13}-\frac{16}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{900}{13^2}+\frac{400}{13^2}} = \sqrt{\frac{1300}{13^2}} = \frac{10\sqrt{13}}{13}$.

7.11.6 On a $(AA') \perp (BD)$ et $(CC') \perp (BD)$. Donc $(AA')//(CC')$.

Soit E le milieu de $[A', C']$. Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, $AE = CE$. On considère la diagonale (AC). Les secteurs $(\widehat{AEA'})$ et $(\widehat{CEC'})$ étant opposés par le sommet, ils ont même angle.

Donc $AA' = AE\sin(\widehat{AEA'}) = CE\sin(\widehat{CEC'}) = CC'$. On en déduit que $AA'CC'$ est un parallélogramme puis que E est le milieu de $[A', C']$.

Ainsi la barre de fer de longueur $A'C'$ dont le centre est placé au milieu de $[B, D]$ peut tourner comme indiqué dans l'énoncé si $A'C' < 4$.

Or $A'C' = \frac{10}{\sqrt{13}}$. Comme $9 < 13$, on a $3 < \sqrt{13}$ et donc $A'C' < \frac{10}{3}$. Or $\frac{10}{3} < 4$. La barre de fer peut donc bien tourner comme indiqué dans l'énoncé.

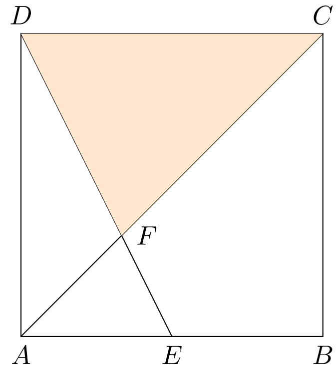
7.11.7 Puisque $(AA') \perp (DA')$, la distance du point D à la droite (AA') est DA'.

On a $DA' = \sqrt{DA^2 - AA'^2} = \sqrt{BC^2 - CC'} = BC'$.

Donc

$$\begin{aligned}
DA' + A'C' + BC' &= DB \\
&= \sqrt{4^2+6^2} \\
&= \sqrt{52} \\
&= 2\sqrt{13} \\
2DA' + \frac{10\sqrt{13}}{13} &= 2\sqrt{13} \text{ car } DA' = BC' \\
DA' &= \frac{1}{2}\left(2\sqrt{13} - \frac{10\sqrt{13}}{13}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2\times 13\sqrt{13} - 10\sqrt{13}}{13}\right) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{16\sqrt{13}}{13} \\
&= \frac{8\sqrt{13}}{13}
\end{aligned}$$

7.12 Soit $ABCD$ un carré de côté a. Soit E le milieu de $[A,\ B]$. Calculer une mesure du secteur $(\widehat{DFC})$, celui qui ne contient pas A.



RÉPONSE

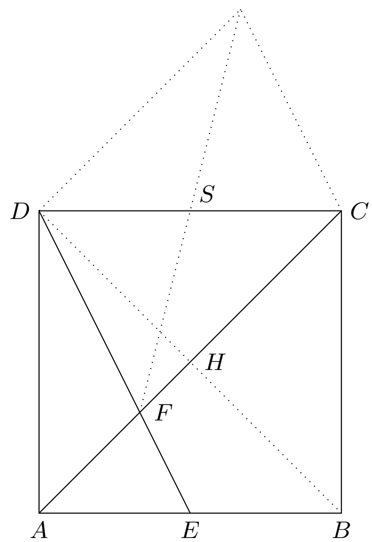
— **1re méthode**. Mesure de secteurs, sans recours au produit scalaire
Les secteurs $(\widehat{DFC})$ et $(\widehat{AFE})$ sont opposés par le sommet F. Ils ont donc la même mesure.
$\text{mes}(\widehat{DFC}) = \pi - \text{mes}(\widehat{BAC}) - \text{mes}(\widehat{DEA})$
$\text{mes}(\widehat{BAC}) = \frac{\pi}{4}$ car (AC) est une diagonale du carré $ABCD$.
$\tan(\widehat{DEA}) = \frac{AD}{AE} = \frac{a}{\frac{1}{2}a} = 2$. Donc $\text{mes}(\widehat{DEA}) = \arctan 2$.
D'où $\text{mes}(\widehat{AFE}) = \text{mes}(\widehat{DFC}) = \pi - \frac{\pi}{4} - \arctan 2 = \frac{3\pi}{4} - \arctan 2 \simeq 1{,}25$ arrondi au centième.

— **2e méthode**. Utilisation du produit scalaire dans un repère. On calcule de deux façons différentes $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FE}$.
On considère le repère orthonormé $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ avec $\vec{\imath} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{\imath} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}$.
Coordonnées des points A, C, E, D et F dans ce repère :

A	C	D	E	F
$(0,\ 0)$	$(a,\ a)$	$(0,\ a)$	$\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$	$\left(\frac{a}{3},\ \frac{a}{3}\right)$

Justification des coordonnées de F. Ce point à le point d'intersection des droites (AC) et (DE).
Une équation de (AC) est $y = x$ et une équation de (DE) est $y = -2x + a$ puisque, (DE) passant par D et E, son cœfficient directeur est $\frac{y_D - y_E}{x_D - x_E} = \frac{a-0}{0-\frac{a}{2}} = -2$ et son ordonnée à l'origine est l'ordonnée a de D.
Les coordonnées de F vérifient donc à la fois $y = x$ et $y = -2x + a$ ce qui donne $y = -2y + a$ puis $y = \frac{a}{3}$ et donc $x = \frac{a}{3}$.
Les composantes de $\overrightarrow{FA}$ sont $\left(-\frac{a}{3},\ -\frac{a}{3}\right)$ et celles de $\overrightarrow{FE}$ sont $\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{3},\ -\frac{a}{3}\right) = \left(\frac{a}{6},\ -\frac{a}{3}\right)$
D'une part $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FE} = -\frac{a}{3} \times \frac{a}{6} + \left(-\frac{a}{3}\right) \times \left(-\frac{a}{3}\right) = -\frac{a^2}{18} + \frac{2a^2}{18} = \frac{a^2}{18}$.
D'autre part, $FA^2 = \left(-\frac{a}{3}\right)^2 + \left(-\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{2a^2}{9}$ ce qui donne $FA = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.
$FE^2 = \left(\frac{a}{6}\right)^2 + \left(-\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{36} + \frac{a^2}{9} = \frac{5a^2}{36}$ ce qui donne $FE = \frac{a\sqrt{5}}{6}$.
D'où $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FE} = FA \times FE \times \cos(\widehat{AFE}) = \frac{a\sqrt{2}}{3} \times \frac{a\sqrt{5}}{6} \times \cos(\widehat{AFE}) = \frac{a^2\sqrt{10}}{18} \times \cos(\widehat{AFE})$.
On en déduit que $\frac{a^2\sqrt{10}}{18} \times \cos(\widehat{AFE}) = \frac{a^2}{18}$ puis $\cos(\widehat{AFE}) = \frac{1}{\sqrt{10}}$ et enfin $\text{mes}(\widehat{AFE}) = \arccos \frac{1}{\sqrt{10}} \simeq 1{,}25$ arrondi au centième.
En degré, $\text{mes}(\widehat{AFE}) \simeq 71{,}57$ arrondi au centième.

— **3e méthode**. Utilisation du calcul vectoriel. On calcule le produit scalaire $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FC}$ de deux façons différentes.
Soit H le milieu de $[D,\ B]$. Les droites (AH) et (DE) sont des médianes du triangle ABD car H et E sont les milieux respectifs des côtés $[D,\ B]$ et $[A,\ B]$. Comme celles-ci se coupent en F, ce point est le centre de gravité de ABD.



On a

$$\begin{aligned} FD &= \frac{2}{3}DE \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{AD^2+AE^2} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5a^2}{4}} \\ &= \frac{a\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} FC &= FH+HC \\ &= \frac{1}{3}AH+HC \\ &= \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}AC \\ &= \frac{2}{3}AC \\ &= \frac{2a\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

On en déduit que $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{FC} = FD\times FC\times\cos(\widehat{DFC}) = \frac{a\sqrt{5}}{3}\times\frac{2a\sqrt{2}}{3}\times\cos(\widehat{DFC}) = \frac{2\sqrt{10}}{9}a^2\cos(\widehat{DFC})$.
Soit S le milieu de $[D,\, C]$. On a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FD}+\overrightarrow{FC} &= (\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AF})-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AF}) \\ &= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AF} \\ &= 2\overrightarrow{AS}-2\overrightarrow{AF} \\ &= 2\overrightarrow{FS} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FD}+\overrightarrow{FC} &= (\overrightarrow{FS}+\overrightarrow{SD})+(\overrightarrow{FS}+\overrightarrow{SC}) \\ &= 2\overrightarrow{FS}+\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{SC} \\ &= 2\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{0} \\ &= 2\overrightarrow{FS} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} FD^2+FC^2 &= 2FS^2+\frac{DC^2}{2} \\ \frac{5}{9}a^2+\frac{8}{9}a^2 &= 2FS^2+\frac{a^2}{2} \\ FS^2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{13}{9}a^2-\frac{a^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{26a^2-9a^2}{18} \\ &= \frac{17a^2}{36} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{FC} &= \frac{1}{2}(\left\|\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{FC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{FD}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{FC}\right\|^2)\\
&= \frac{1}{2}\left(\left\|2\overrightarrow{FS}\right\|^2-\frac{5}{9}a^2-\frac{8}{9}a^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(4\times\frac{17a^2}{36}-\frac{5}{9}a^2-\frac{8}{9}a^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{17a^2-5a^2-8a^2}{9}\right)\\
&= \frac{2}{9}a^2
\end{aligned}$$

On en déduit que $\frac{2\sqrt{10}}{9}a^2\cos(\widehat{DFC})=\frac{2}{9}a^2$ puis $\cos(\widehat{DFC})=\frac{1}{\sqrt{10}}$.