Sommaire

Second degré

Dans tout le chapitre,
- lorsque des équations sont disposées les unes sous les autres, cela signifie qu'elles ont le *même* ensemble de solutions ;
- $\mathscr{S}$ désigne l'ensemble des solutions de l'équation que l'on résout.

1 Fonction polynôme du second degré

1.1 Définition : fonction polynôme du second degré

Soient a un réel *non nul*, b et c deux réels. On appelle *fonction polynôme du second degré* ou *polynôme du second degré* ou *fonction trinôme du second degré* ou encore *trinôme du second degré*, la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = ax^2 + bx + c \end{array}$$

Les réels a, b et c sont appelés *coefficients du polynôme f* :
- a est le *coefficient du terme en x^2* ou *coefficient dominant* ;
- b est le *cœfficient du terme en x* ;
- c est le *terme constant*.

La forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ est appelée *forme développée de $f(x)$*.
En particulier, l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

1.2 Exemples et contre-exemples

1.2.1 $f : x \mapsto x^2$ est un polynôme du second degré. Ses cœfficients sont : $c = 0$, $b = 0$ et $a = 1$.

1.2.2 $f : x \mapsto x^2 + x + 1$ est un polynôme du second degré. Ses cœfficients sont : $c = 1$, $b = 1$ et $a = 1$.

1.2.3 $f : x \mapsto -2x^2 + 3x$ est un polynôme du second degré. Ses cœfficients sont : $c = 3$, $b = 0$ et $a = -2$.

1.2.4 $f : x \mapsto \frac{3}{4}x^2 + 5x$ est un polynôme du second degré. Ses cœfficients sont : $c = 0$, $b = 5$ et $a = \frac{3}{4}$.

1.2.5 $f : x \mapsto 64$ n'est pas un polynôme du second degré. C'est un polynôme dont le degré est 0.

1.2.6 $f : x \mapsto \frac{1}{2}x - 1$ n'est pas un polynôme du second degré. C'est un polynôme du premier degré.

1.2.7 $f : x \mapsto x^3 - x^2 + x$ n'est pas un polynôme du second degré. C'est un polynôme du troisième degré.

1.2.8 $f : x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas un polynôme.

1.2.9 $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas un polynôme.

1.3 Théorème et définition : forme canonique

Soit f une fonction définie dans $\mathbb{R}$.
- Si f est un polynôme du second degré $x \mapsto ax^2 + bx + c$ alors il existe un couple de réels (α, β) tel que pour tout réel x,

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta \text{ où } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

  $a(x - \alpha)^2 + \beta$ est appelée *forme canonique de $ax^2 + bx + c$*.

— Réciproquement, si f est telle qu'il existe un triplets de réels $(\gamma,\ \alpha,\ \beta)$ tel que pour tout réel x, $f(x) = \gamma(x-\alpha)^2+\beta$ alors f est un polynôme du second degré dont les cœfficients sont $c = \gamma\alpha^2+\beta$, $b=-2\gamma\alpha$ et $a=\gamma$.

Démonstration

— Soit f un polynôme du second degré $x \mapsto ax^2+bx+c$. Alors, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{bx}{a}\right)+c \\ &= a\left(x^2+2\times x\times\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c \\ &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+\frac{4ac}{4a} \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \end{aligned}$$

On a donc démontré qu'il existe un couple de réels $(\alpha,\ \beta)$ tel que pour tout réel x, $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

— Réciproquement, si f est telle qu'il existe un triplet de réels $(\gamma,\ \alpha,\ \beta)$ tel que pour tout réel x, $f(x)=\gamma(x+\alpha)^2+\beta$ alors, en développant, on a $f(x)=\gamma(x^2+2a\alpha+\alpha^2)+\beta=\gamma x^2+2\gamma\alpha+\gamma\alpha^2$. Donc f est un polynôme du second degré dont les cœfficients sont $c=\gamma\alpha^2+\beta$, $b=2\gamma\alpha$ et $a=\aleph$.

■

1.4 Exemples et contre-exemples

1.4.1 Soit $f\ : x\mapsto \frac{1}{2}x^2-4x+5$. f est une fonction polynôme du second degré avec $a=\frac{1}{2}$, $b=-4$ et $c=5$.

On a $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\times\frac{1}{2}}=4$ et $\beta=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{(-4)^2-4\times\frac{1}{2}\times 5}{4\times\frac{1}{2}}=-\frac{16-10}{2}=-3$.

Donc la forme canonique de $f(x)$ est $\frac{1}{2}(x-4)^2-3$.

1.4.2 La fonction $f\ : x\mapsto x^2+x+1$ est un polynôme du second degré. Sa forme canonique est $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$.

1.4.3 La fonction $f\ : x\mapsto x^2-2x+1$ est un polynôme du second degré. Sa forme canonique est $(x-1)^2$.

1.4.4 la fonction $f\ : x\mapsto x^2+3x+2$ est un polynôme du second degré. Sa forme canonique est $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$.

1.4.5 La forme canonique de la fonction carré $x\mapsto x^2$ est elle-même.

1.4.6 $x\mapsto(x-1)(x+1)$ n'est pas une forme canonique bien que $x\mapsto(x-1)(x+1)$ soit un polynôme du second degré. On obtient cette forme en développant $(x-1)(x+1)$ et on trouve x^2-1.

1.4.7 Les fonctions $x\mapsto 3$, $x\mapsto -x+1$, $x\mapsto x^3$ et $x\mapsto\frac{1}{x}$ n'admettent pas de forme canonique puisqu'aucune de ces fonctions n'est un polynôme du second degré.

1.4.8 Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=5(x+1)^2-2$. Comme $f(x)$ est de la forme $f(x)=\aleph(x+\alpha)^2+\beta$ avec $\aleph=5$, $\alpha=1$ et $\beta=-2$, f est une fonction polynôme du second degré dont les cœfficients sont $c=3$, $b=10$ et $a=5$ car $f(x)=5(x^2+2x+1)-2=5x^2+10x+3$.

1.4.9 Soit $f\ : x \mapsto (7x-1)^2$. f est une fonction polynôme du second degré car $(7x-1)^2 = 49x^2-14x+1$. Mais la forme $(7x-1)^2$ n'est pas une forme canonique à cause du « 7 » dans le « $7x$ ».

Celle-ci s'obtient grâce au calcul suivant : $(7x-1)^2 = \left(7\left(x-\frac{1}{7}\right)\right)^2 = 7^2\left(x-\frac{1}{7}\right)^2 = 49\left(x-\frac{1}{7}\right)^2$.

1.5 Utilisation de la forme canonique

La forme canonique d'un polynôme du second degré permet de
— résoudre une équation du second degré ;
— le factoriser lorsque cela est possible ;
— déterminer son signe ;
— déterminer son sens de variation ;
— connaître le réel en lequel il atteint son extremum ainsi que cet extremum.

1.6 Théorème : extrema

Soit $f\ : x \mapsto ax^2+bx+c$ une fonction polynôme du second degré.
— Si $a>0$ alors f admet alors un minimum dans $\mathbb{R}$ égal à $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ et atteint une seule fois, en $-\frac{b}{2a}$.
— Si $a<0$ alors f admet alors un maximum dans $\mathbb{R}$ égal à $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ et atteint une seule fois, en $-\frac{b}{2a}$.
Cela signifie que
— si $a>0$ pour tout réel x, $f(x) \geqslant -\frac{b^2-4ac}{4a}$ et que l'équation $f(x) = -\frac{b^2-4ac}{4a}$ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$: $-\frac{b}{2a}$;
— si $a<0$ pour tout réel x, $f(x) \leqslant -\frac{b^2-4ac}{4a}$ et que l'équation $f(x) = -\frac{b^2-4ac}{4a}$ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$: $-\frac{b}{2a}$.

Démonstration
Soit x un réel. La forme canonique de ax^2+bx+c est $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$.
On a $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$.

Si $a>0$ alors

$$\begin{aligned} a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &\geqslant 0 \\ a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} &\geqslant -\frac{b^2-4ac}{4a} \\ f(x) &\geqslant -\frac{b^2-4ac}{4a} \end{aligned}$$

Donc f admet un minimum dans $\mathbb{R}$ égal à $-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Si $a<0$ alors

$$\begin{aligned} a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &\leqslant 0 \\ a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} &\leqslant -\frac{b^2-4ac}{4a} \\ f(x) &\leqslant -\frac{b^2-4ac}{4a} \end{aligned}$$

Donc f admet un maximum dans $\mathbb{R}$ égal à $-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Dans les deux cas, on considère l'équation $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.
Elle a le même ensemble-solution que les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} &= -\frac{b^2-4ac}{4a}\\
a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= 0\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= 0\\
x+\frac{b}{2a} &= 0\\
x &= -\frac{b}{2a}
\end{aligned}$$

L'équation $f(x)=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ admettant la seule solution $-\frac{b}{2a}$, le minimum (resp. maximum) de la fonction f est atteint une seule fois, en $-\frac{b}{2a}$. ■

1.7 Théorème : sens de variations

Soit $f\ : x \mapsto ax^2+bx+c$ une fonction polynôme du second degré.

— Si $a>0$ alors f est strictement décroissante dans $\left]-\infty\,;-\frac{b}{2a}\right]$ et strictement croissante dans $\left[-\frac{b}{2a}\,;+\infty\right[$;

— si $a<0$ alors f est strictement croissante dans $\left]-\infty\,;-\frac{b}{2a}\right]$ et strictement décroissante dans $\left[-\frac{b}{2a}\,;+\infty\right[$.

Démonstration. Soient x et y deux réels tels que $x<y$. Pour déterminer le sens de variation de f, on calcule $f(x)-f(y)$ puis on détermine le signe de cette différence.

On a

$$\begin{aligned}
f(x)-f(y) &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}-\left(a\left(y+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-a\left(y+\frac{b}{2a}\right)^2\\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(y+\frac{b}{2a}\right)^2\right)\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}+y+\frac{b}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-y-\frac{b}{2a}\right)\\
&= a\left(x+y+\frac{b}{a}\right)(x-y)
\end{aligned}$$

Puisque $x<y$, $x-y<0$.

Si $a>0$ alors

— si x et y appartiennent à $\left]-\infty,\ -\frac{b}{2a}\right]$ alors $x+y$ appartient à $\left]-\infty,\ -\frac{b}{a}\right[$ car $x<y$ et donc $x+y+\frac{b}{a}<0$ ce qui donne $a\left(x+y+\frac{b}{a}\right)(x-y)>0$ puis $f(x)>f(y)$: la fonction f est strictement décroissante dans $\left]-\infty,\ -\frac{b}{2a}\right]$;

— si x et y appartiennent à $\left[-\frac{b}{2a},\ +\infty\right[$ alors $x+y$ appartient à $\left[-\frac{b}{a},\ +\infty\right[$ car $x<y$ et donc $x+y+\frac{b}{a}>0$ ce qui donne $a\left(x+y+\frac{b}{a}\right)(x-y)<0$ puis $f(x)<f(y)$: la fonction f est strictement croissante dans $\left[-\frac{b}{2a},\ +\infty\right[$.

On démontre de même que si $a < 0$ alors f est strictement croissante dans $\left]-\infty\,;-\frac{b}{2a}\right]$ et strictement décroissante dans $\left[-\frac{b}{2a}\,;+\infty\right[$. ■

1.8 Tableau de variations

$a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f		$\searrow$	$-\frac{b^2-4ac}{4a}$	$\nearrow$	

$a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f		$\nearrow$	$-\frac{b^2-4ac}{4a}$	$\searrow$	

1.9 Courbe représentative

1.9.1 La courbe d'une fonction $x \mapsto ax^2+bx+c$ s'appelle une *parabole*. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, son équation est $y = ax^2+bx+c$.

— Elle possède un axe de symétrie qui est la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.
— Le point S de coordonnées $\left(-\frac{b}{2a}\,;-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ s'appelle le *sommet* de la parabole [1].
— Si $a > 0$, on dit que la parabole est *tournée vers le haut* et si $a < 0$, qu'elle est *tournée vers le bas* [2].

1. Dans le repère $(S\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, son équation est $Y = aX^2$.
2. Ces appellations sont fondées sur la position supposée verticale de la personne qui parle ainsi et regarde la parabole en face.

1.9.2 Voici quelques paraboles, accompagnées de leur axe de symétrie et de la détermination graphique du signe de $ax^2 + bx + c$ en fonction de x.

1.9.2.1

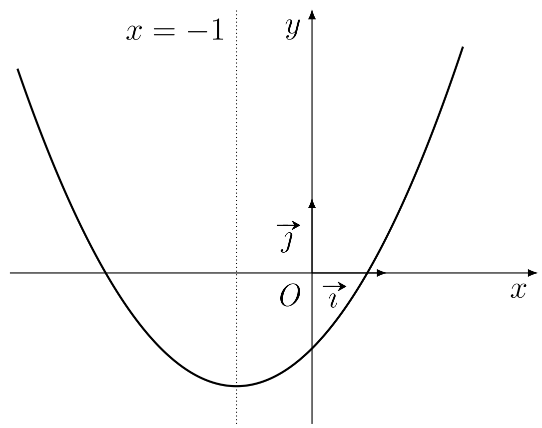


FIGURE 1 – Courbe de la fonction $x \mapsto 0{,}5x^2 + x - 1$; axe de symétrie d'équation : $x = -1$

Soient x_1 et x_2 les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite des abscisses.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$0{,}5x^2+x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1.9.2.2

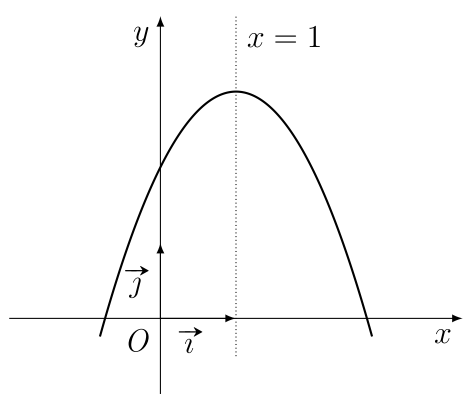


FIGURE 2 – Courbe de la fonction $x \mapsto -x^2 + 2x + 2$; axe de symétrie d'équation : $x = 1$

Soient x_1 et x_2 les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite des abscisses. Le signe de $-x^2 + 2x + 2$ en fonction de x est donné par le tableau suivant.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$-x^2+2x+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

1.9.2.3

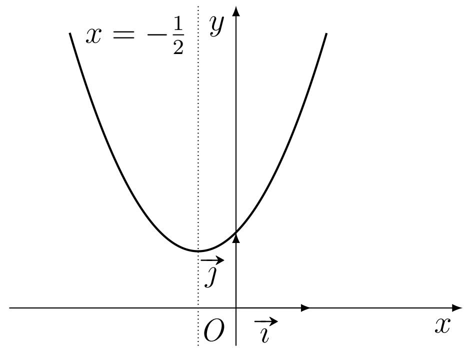


FIGURE 3 – Courbe de la fonction $x \mapsto x^2 + x + 1$; axe de symétrie d'équation : $x = -\frac{1}{2}$

Le signe de $x^2 + x + 1$ en fonction de x est donné par le tableau suivant.

x	$-\infty$	$+\infty$
$x^2 + x + 1$	+	

1.9.2.4

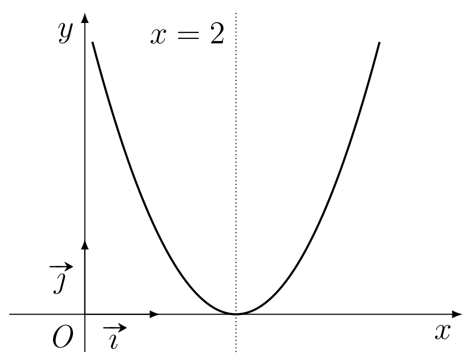


FIGURE 4 – Courbe de la fonction $x \mapsto x^2 - 4x + 4$; axe de symétrie d'équation : $x = 2$

Soit x_0 l'abscisse du point d'intersection de la courbe avec la droite des abscisses. Le signe de $x^2 - 4x + 4$ en fonction de x est donné par le tableau suivant.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$x^2 - 4x + 4$		+	0	+	

1.10 Exercice

Pour chaque fonction polynôme f, déterminer son sens de variation, son extremum, le réel en lequel il est atteint, son tableau de variation, sa forme canonique, la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 0$, le signe de $f(x)$ en fonction de x ainsi que les coordonnées du sommet et l'axe de symétrie de la parabole la représentant. Terminer par le tracé de cette parabole.

1.10.1 $f \ : x \mapsto x^2 + x$.

1.10.2 $f \ : x \mapsto -x^2 + 3x - 2$.

1.11 Problème

On considère un rectangle $ABCD$ de longueur 4 et de largeur 2. Soit x un réel de l'intervalle $]0,2[$. Dans les intervalles $[A,D]$, $[D,C]$, $[C,B]$ et $[B,A]$, on place respectivement les points M, N, P, Q tels que $AM = DN = CP = BQ = x$ et on considère le quadrilatère $MNPQ$.

1.11.1 Faire une figure

1.11.2 Démontrer que l'aire de $MNPQ$ est $\mathscr{A}(x) = 2x^2 - 6x + 8$.

1.11.3 Déterminer le réel α pour lequel $\mathscr{A}$ est minimale. Quelle est alors l'aire obtenue ?

1.12 Remise en jambes, si nécessaire...

1.12.1 Développer, réduire et ordonner $P(x) = (x^2 + 2x) - (x+1)^2 + (2x-1)^2$.

1.12.2 Soit $Q(x) = (9x^2 - 4)^2 - (3x+2)^2$.

1.12.2.1 Factoriser $Q(x)$.

1.12.2.2 Développer, réduire et ordonner $Q(x)$.

1.12.2.3 Résoudre l'équation $Q(x) = 0$.

Réponses.

1. $4x^2 - 4x$.
2. (a) $(3x+2)^2(3x-3)(3x-1)$.
   (b) $81x^4 - 81x^2 - 12x + 12$.
   (c) $\mathscr{S} = \left\{-\frac{2}{3};\ 1;\ \frac{1}{3}\right\}$.

2 Équations du second degré dans $\mathbb{R}$

2.1 Équations du second degré particulières

2.1.1 Résoudre (E) : $x^2 - 1 = 0$.

1re version

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 \\ (x-1)\times(x+1) &= 0 \\ x-1=0 \quad \text{ou} &\quad x+1=0 \\ x=1 \quad \text{ou} &\quad x=-1 \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S} = \{1\,;-1\}$

2e version

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 \\ x^2 &= \boxed{1} \\ x=1 \quad \text{ou} &\quad x=-1 \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S} = \{1\,;-1\}$.

Dans la deuxième version, puisque $\boxed{1} > 0$, ce réel admet exactement deux racines carrées.

2.1.2 Résoudre (E) : $x^2 + 1 = 0$. (E) n'a pas de solution. En effet, pour tout réel x, $x^2 + 1 > 0$ et donc $x^2 + 1$ ne peut jamais s'annuler. D'où $\mathscr{S} = \varnothing$.

2.1.3 Résoudre (E) : $-3x^2 + 6x = 0$.

$$\begin{aligned} -3x^2 + 6x &= 0 \\ -3x(x-2) &= 0 \\ x=0 \quad \text{ou} &\quad x-2=0 \\ x=0 \quad \text{ou} &\quad x=2 \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S} = \{0\,;2\}$.

2.1.4 Résoudre (E) : $9x^2 + 6x + 1 = 0$.

$$\begin{aligned} 9x^2 + 6x + 1 &= 0 \\ (3x+1)^2 &= 0 \\ 3x+1 &= 0 \\ x &= -\tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S} = \{-\frac{1}{3}\}$.

2.1.5 Résoudre (E) : $(x-1)(3x+2) - (3x+2)(-x+8) = 0$.

$$\begin{aligned}
(x-1)(3x+2)-(3x+2)(-x+8) &= 0\\
(3x+2)(x-1-(-x+8)) &= 0\\
(3x+2)(2x-9) &= 0\\
3x+2=0 \quad \text{ou} &\quad 2x-9=0\\
x=-\tfrac{2}{3} \quad \text{ou} &\quad x=\tfrac{9}{2}
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S}=\{-\frac{2}{3}\,;\frac{9}{2}\}$.

2.1.6 Résoudre (E) : $x^2-16+2(x-4)=0$.

$$\begin{aligned}
(x-4)(x+4)+2(x-4) &= 0\\
(x-4)(x+4+2) &= 0\\
(x-4)(x+6) &= 0\\
x-4=0 \quad \text{ou} &\quad x+6=0\\
x=4 \quad \text{ou} &\quad x=-6
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S}=\{4\,;-6\}$.

2.2 Problèmes du second degré

2.2.1 De quoi s'agit-il ?

Un *problème du second degré* est un problème de nature mathématique (algébrique, analytique ou géométrique) ou non mathématique (physique ou économique). Sa résolution commence par le choix d'une inconnue et la recherche de contrainte(s) portant sur elle. Il se poursuit par une mise en équation ou en système d'équations, suivie de sa résolution. Il se termine par la réponse au problème posé : la ou les éventuelle(s) solution(s) trouvée(s) respectent-elles la ou les contraintes ? Si oui alors le problème a une ou plusieurs solutions. Si non alors le problème n'a pas de solution.

2.2.2 Un problème de nature algébrique

Trouver deux nombres connaissant leur somme $S=29$ et leur produit $P=198$.

Soient x et y les deux nombres cherchés. On résout le système $\begin{cases} x+y = 29\\ x\times y = 198\end{cases}$

On a $\begin{cases} y = 29-x\\ x\times(29-x) = 198\end{cases}$ puis $\begin{cases} y = 29-x\\ -x^2+29x-198 = 0\end{cases}$

On doit résoudre l'équation $-x^2+29x-198=0$. Mais, à ce stade du cours, on ne sait pas le faire.

2.2.3 Un problème de nature électrique

En courant continu, à partir de résistors de résistances respectives R_1 et R_2, on obtient une résistance équivalente $R = R_1 + R_2$ dans une association en série et une résistance équivalente r telle que $\frac{1}{r} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ dans une association en parallèle. Les schémas électriques sont les suivants :

Figure 5 – Association de deux résistors en série

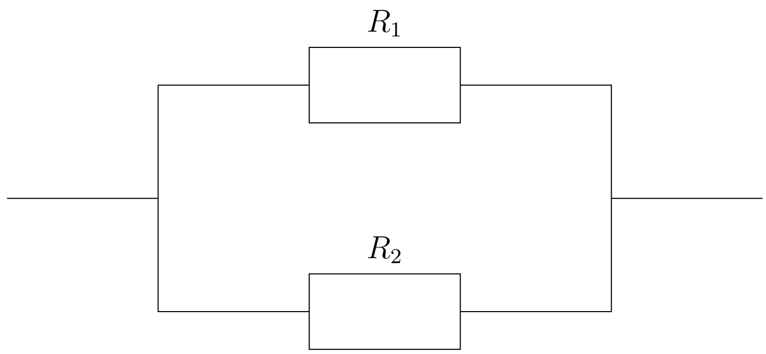


Figure 6 – Association de deux résistors en parallèle

Existe-t-il des résistances R_1 et R_2 telles que $R = 2{,}5\ \Omega$ et $r = 0{,}4\ \Omega$?

2.2.4 Un problème de nature géométrique

On considère un trapèze rectangle $ABCD$ tel que
- $AD = 6$;
- une mesure en degrés de l'angle $\widehat{DAB}$ est 45 ;
- E est le point du segment $[A,\ D]$ tel que les segments $[A,\ E]$ et $[B,\ E]$ ont la même longueur ; on la note x, elle est inconnue.

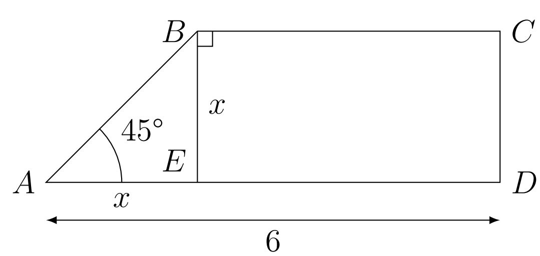


Figure 7 – Un trapèze à une inconnue

Existe-t-il x pour que l'aire du trapèze soit égale à 10 ?

2.2.5 Un problème de nature économique

Un capital de 10 000 € est placé au taux de $t\%$ pendant un an. L'intérêt est capitalisé et le nouveau capital est placé l'année suivante au taux de $(1+t)\%$. À la fin de la deuxième année, le capital s'élève à 11 130 €.

2.2.5.1 Démontrer que le réel t est solution de l'équation $(100+t)(101+t) = 11\,130$.

2.2.5.2 En déduire t.

2.2.6 Un problème de partage

Une somme de 4 000 € doit être distribuée en parts égales entre un certain nombre de personnes. Cependant, au moment de partage, quatre personnes se retirent, ce qui augmente la part des autres de 50 €.

Quel était le nombre initial de personnes et la part des personnes restantes ?

2.3 Équations du second degré : cas général

2.3.1 Définitions

Soient a un réel *non nul*, b et c deux réels. On appelle *équation du second degré* une équation du type

$$ax^2 + bx + c = 0$$

où l'inconnue est un réel x.

On appelle *solution d'une équation du second degré* un réel x qui vérifie l'égalité ci-dessus c'est-à-dire tel que son image par $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est égale à 0.

Résoudre une équation du second degré consiste à chercher toutes les solutions de celles-ci.

On appelle *racine d'un polynôme P du second degré* un réel α tel que $P(\alpha) = 0$.

2.3.2 Exemples

2.3.2.1 1 est solution de l'équation (E) : $x^2 + 4x - 5 = 0$ car $1^2 + 4 \times 1 - 5 = 1 - 1 = 0$.

Un réel pour lequel il est facile de voir *assez rapidement* c'est-à-dire avec relativement peu de calculs (mentaux ou écrits) qu'il est solution d'une équation du second degré est qualifié de *solution évidente*[3]. Ce réel, *on se le donne* c'est-à-dire que l'on en choisit un en particulier puis on calcule son image par la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ et oui ou non, on trouve 0.

En général, un des éléments de $\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ est appelé *solution évidente*. Mais rien n'empêche de faire des essais en choisissant d'autres réels.

Une équation du second degré n'a pas toujours de solution évidente. Qui est capable de voir que $-0{,}25$ est solution de $x^2 + \frac{3}{20}x - \frac{1}{10} = 0$? Cela n'a rien d'évident. Mais pour un bon calculateur (humain…), cela peut être le cas.

Une équation du second degré peut ne pas avoir de solution. Si elle en possède une, en a-t-elle une autre ? Combien ? L'objet de ce qui suit est de montrer comment on peut déterminer l'ensemble des solutions.

3. Mais cela n'est pas réservé qu'aux équations du second degré, le qualificatif *solution évidente* concerne toutes les équations.

2.3.2.2 Résoudre (E) : $x^2+4x-5=0$.
x^2+4x est presqu'un carré.
En effet, c'est $(x+2)^2$ auquel il manque 2^2 puisque $(x+2)^2-2^2=x^2+2\times x\times 2+2^2-2^2=x^2+4x$.

$$\begin{aligned}
x^2+4x-5 &= x^2+2\times x\times 2-5\\
&= (x+2)^2-2^2-5\\
&= (x+2)^2-9 \text{ forme canonique de } x^2+4x-5\\
&= (x+2)^2-3^2\\
&= (x+2-3)\times(x+2+3)\\
&= (x-1)\times(x+5) \text{ forme factorisée de } x^2+4x-5
\end{aligned}$$

On en déduit que les solutions de (E) sont les solutions de $(x-1)(x+5)=0$ c'est-à-dire celles de $x-1=0$ ou $x+5=0$ ce qui donne $x=1$ ou $x=-5$. Ainsi, $\mathscr{S}=\{1\,;-5\}$.

2.3.2.3 Résoudre (E) : $2x^2-9x-5=0$.

$$\begin{aligned}
2x^2-9x-5 &= 2\left(x^2-\frac{9}{2}x\right)-5 \text{ on factorise } 2x^2-9x \text{ par } a=2\\
&= 2\left(x^2-2\times x\times\frac{9}{4}\right)-5\\
&= 2\left(\left(x-\frac{9}{4}\right)^2-\left(\frac{9}{4}\right)^2\right)-5\\
&= 2\left(\left(x-\frac{9}{4}\right)^2-\frac{81}{16}\right)-5\\
&= 2\left(x-\frac{9}{4}\right)^2-\frac{81}{8}-5\\
&= 2\left(x-\frac{9}{4}\right)^2-\frac{121}{8} \text{ forme canonique de } 2x^2-9x-5\\
&= 2\left(\left(x-\frac{9}{4}\right)^2-\frac{121}{16}\right)\\
&= 2\left(\left(x-\frac{9}{4}\right)^2-\left(\frac{11}{4}\right)^2\right)\\
&= 2\left(x-\frac{9}{4}-\frac{11}{4}\right)\times\left(x-\frac{9}{4}+\frac{11}{4}\right)\\
&= 2\left(x-\frac{20}{4}\right)\times\left(x+\frac{2}{4}\right) \text{ forme factorisée de } 2x^2-9x-5\\
&= 2(x-5)\times\left(x+\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que les solutions de (E) sont celles de $2(x-5)\times\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$ c'est-à-dire celles de $x-5=0$ ou $x+\frac{1}{2}=0$ ce qui donne $x=5$ ou $x=-\frac{1}{2}$.

2.3.2.4 Résoudre (E) : $x^2+x+1=0$.

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= x^2+2\times x\times\frac{1}{2}+1 \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1 \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \text{ forme canonique de } x^2+x+1 \end{aligned}$$

Comme $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$ et $\frac{3}{4}>0$, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ ne s'annule pas dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire qu'il n'existe aucun réel x tel que $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=0$. Comme l'ensemble des solutions de $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=0$ est celui de (E), celle-ci n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

2.3.3 Théorème

Soit (E) : $ax^2+bx+c=0$ une équation du second degré. Soit $\Delta=b^2-4ac$.
Alors
— si $\Delta>0$, (E) admet deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
— si $\Delta=0$, (E) admet une seule solution dite *double* : $-\frac{b}{2a}$;
— si $\Delta<0$, (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Démonstration Soit x un réel. La forme canonique de ax^2+bx+c est $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$
On en déduit que $ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$.

— 1^er^ cas : $\Delta>0$.
Comme $\frac{b^2-4ac}{4a^2}>0$, c'est le carré de deux réels, par exemple $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (l'autre est $-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$).
Alors

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\times\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right) \text{ entre parenthèses, il y a la différence entre deux carrés} \\ &= a\times\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\times\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \text{ utilisation de la formule } x^2-y^2=(x+ \\ &= a\times\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\times\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \end{aligned}$$

D'où x est solution de (E) si et seulement si $x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$ ou $x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$
c'est-à-dire $x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ou $x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
Donc, lorsque $\Delta>0$, (E) admet deux solutions distinctes.

— 2^e^ cas : $\Delta=0$.
Alors $ax^2+bx+c=a\times\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.
D'où x est solution de (E) si et seulement si $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ c'est-à-dire $x=-\frac{b}{2a}$.
Donc, lorsque $\Delta=0$, (E) admet une seule solution.

— 3^e^ cas : $\Delta<0$.
Alors $-\frac{b^2-4ac}{4a^2}>0$ car $b^2-4ac<0$ et $4a^2>0$.
Puis, comme $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geqslant 0$, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}>0$.
Enfin, comme $a\neq 0$, $a\times\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\neq 0$ pour tout réel x.

Donc, lorsque $\Delta < 0$, (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.■

2.3.4 Définition

Le réel Δ, par l'intermédiaire de son signe, permet de faire la différence entre les trois cas d'existence ou d'absence de solution(s) de l'équation (E) : il discrimine.

Pour cette raison, on l'appelle le *discriminant* de (E).

2.3.5 Remarques

2.3.5.1 Le théorème 2.3.3 dit qu'une équation du second degré admet au plus deux solutions : soit *deux* soit *une* soit *aucune*.

2.3.5.2 Lorsque $\Delta = 0$, on dit que (E) admet une solution *double* puisque le facteur $x + \frac{b}{2a}$ étant au carré, il apparaît *deux* fois dans la factorisation de $ax^2 + bx + c$. On obtient deux fois la *même* solution.

2.3.5.3 Le théorème 2.3.3 comporte une *disjonction des cas*. Cela signifie que, lors du calcul de Δ, on est dans l'*un* des trois cas possibles et pas dans l'un des deux autres (on dit aussi *à l'exclusion des deux autres*).

2.3.6 Corollaire du théorème 2.3.3 : factorisation de $ax^2 + bx + c$ dans $\mathbb{R}$

On note toujours $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Soit x un réel. Alors

— si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$;

— si $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c = a\left(x - x_0\right)^2$;

— si $\Delta < 0$, $ax^2 + bx + c$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

Les factorisations qui correspondent aux cas $\Delta > 0$ et $\Delta = 0$ ont été obtenues au cours de la démonstration du théorème 2.3.3.

Cas où $\Delta < 0$.

Au cours de la démonstration de ce même théorème, on a aussi démontré que dans ce cas, le réel $ax^2 + bx + c$ était non nul.

Si $ax^2 + bx + c$ se factorisait en un produit de deux facteurs, il existerait deux réels r_1 et r_2 tels que $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(a - r_2)$. Alors pour $x = r_1$ par exemple, $ax^2 + bx + c$ serait nul. Cela contredirait le fait que $ax^2 + bx + c$ soit non nul. On en déduit que lorsque $\Delta < 0$, $ax^2 + bx + c$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$. ■

2.3.7 Remarques

2.3.7.1 Le corollaire 2.3.6 fait aussi apparaître une disjonction des cas.

2.3.7.2 Sans précision supplémentaire, la factorisation d'un trinôme P du second degré, lorsqu'elle existe, met en jeu des polynômes, l'un de degré 0, il s'agit de la constante non nulle a, les autres de degré 1, ce sont $x - x_0$ ou $x - x_1$ ou $x - x_1$. Seul le cas $\Delta < 0$ « empêche » P de se factoriser dans $\mathbb{R}$ de cette manière. Mais cela ne veut pas dire que, dans ce cas, P ne se factorise pas autrement, c'est-à-dire à l'aide de facteurs d'une autre nature.

Par exemple $x \mapsto x^2 + x + 1$ ne se factorise pas car $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$.

Mais, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$x^2 + x + 1 = x^2 + 2x + 1 - x = (x + 1)^2 - x = (x + 1)^2 - \sqrt{x}^2 = (x + 1 - \sqrt{x})(x + 1 + \sqrt{x})$.

Par contre, si $x < 0$, une factorisation de ce type n'existe pas dans $\mathbb{R}$.

Généralisation. Soit $x \geqslant 0$. On suppose que $\frac{c}{a} > 0$ et que $2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a} \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(\left(x+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 - 2x\sqrt{\frac{c}{a}}+\frac{b}{a}x\right)\\
&= a\left(\left(x+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 - x\left(2\sqrt{\frac{c}{a}}-\frac{b}{a}\right)\right)\\
&= a\left(\left(x+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 - \sqrt{x\left(2\sqrt{\frac{c}{a}}-\frac{b}{a}\right)}^2\right)\\
&= a\left(x+\sqrt{\frac{c}{a}}-\sqrt{x\left(2\sqrt{\frac{c}{a}}-\frac{b}{a}\right)}\right)\left(x+\sqrt{\frac{c}{a}}+\sqrt{x\left(2\sqrt{\frac{c}{a}}-\frac{b}{a}\right)}\right)
\end{aligned}$$

Si $x < 0$, une factorisation du type de celle obtenue pour x^2+x+1 lorsque $x \geqslant 0$ existe dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes qui sera abordé en terminale s.
Soit i le nombre complexe dont la partie imaginaire est positive et tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
$x^2+x+1 = (x+1)^2 - x = (x+1)^2 - (-(-x)) = (x+1)^2 - (\mathrm{i}^2(-x)) = (x+1)^2 - (\mathrm{i}\sqrt{-x})^2 = (x+1-\mathrm{i}\sqrt{-x})(x+1+\mathrm{i}\sqrt{-x})$.

2.3.8 Obtention d'une éventuelle factorisation de ax^2+bx+c

2.3.8.1 *Via* une solution connue (évidente ou pas) α, on peut factoriser ax^2+bx+c en écrivant $ax^2+bx+c = ax^2+bx+c-0 = ax^2+bx+c-(a\alpha^2+b\alpha+c)$.

2.3.8.2 *Via* la résolution de $ax^2+bx+c=0$ avec calcul du discriminant, on peut, grâce aux éventuelles solutions, factoriser ou pas ax^2+bx+c.

2.3.8.3 *Via* la recherche de la forme canonique de ax^2+bx+c, on peut savoir si oui ou non ax^2+bx+c est factorisable.

2.3.8.4 Des exemples de factorisation ont été donnés à la sous-sous-sous-section **2.3.2.2** et il va y en avoir d'autres dans la sous-sous-section **2.3.11**.

2.3.9 Théorème : somme et produit des racines d'un polynôme du second degré

On se place dans les conditions du théorème précédent. Soit $P\ : x \mapsto ax^2+bx+c$. Si $\Delta \geqslant 0$ alors
— la somme des racines de P est $s = -\frac{b}{a}$;
— le produit des racines de P est $p = \frac{c}{a}$.

Démonstration
Puisque $\Delta \geqslant 0$ on a
— soit $\Delta > 0$ et alors $P(x)=0$ admet deux solutions : $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
— soit $\Delta = 0$ et alors $P(x)=0$ admet une solution double $-\frac{b}{2a}$.
Dans les deux cas, $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$. ■

Exemple
On considère l'équation $x^2+2020x-2021=0$.
1 est solution évidente de cette équation puisque $1^2+2020\times 1-2021 = 2021-2021 = 0$. Soit x' l'autre solution. Puisque la somme de $x=1$ et de x' est $-\frac{2020}{1} = -2020$, on a $1+x' = -2020$ ce qui donne $x' = -2021$. On peut aussi trouver x' en utilisant le produit $\frac{-2021}{1} = -2021$ de 1 et de x'. Alors $1\times x' = -2021$ et donc $x' = -2021$.

2.3.10 Approfondissement : une réciproque du résultat précédent

2.3.10.1 Soient s et p deux nombres réels. Existe-t-il des nombres réels de somme s et de produit p ? Si oui, comment les trouver ?

Pour cela, on considère le système (S) d'inconnue $(x,\, x')$ suivant

$$(S)\ :\left\{\begin{array}{rcl} x+x' &=& s \\ xx' &=& p \end{array}\right.$$

Les systèmes suivants ont le même ensemble-solution que (S) :
$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& s-x \\ x(s-x) &=& p \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& s-x \\ x(s-x) &=& p \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& s-x \\ -x^2+sx-p &=& 0 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& s-x \\ x^2-sx+p &=& 0 \end{array}\right.$
Le système (S) a des solutions si et seulement si l'équation $x^2-sx+p=0$ a des solutions c'est-à-dire si $(-s)^2-4p=s^2-4p\geqslant 0$ ou $s^2\geqslant 4p$. Sous cette condition, les nombres cherchés existent et on les trouve en résolvant l'équation $x^2-sx+p=0$ et les couples solutions s'obtiennent en résolvant complètement le système (S).

2.3.10.2 Exemples

2.3.10.2.1 Existe-t-il deux nombres de somme 2 et de produit 1 ? Si oui, quels sont-ils ?

Comme $2^2-4\times 1=0$, ces nombres existent. Ils sont solutions de l'équation $x^2-2x+1=0$ dont la solution est $-\frac{-2}{2\times 1}=1$. Ces nombres sont 1 et 1.

2.3.10.2.2 Même question avec 3 et 3.

Comme $3^2-4\times 3=-3<0$, il n'existe pas de nombres réels de somme 3 et de produit 3.

2.3.10.2.3 Même question avec $s=1$ et $p=-6$.

Ces nombres existent puisque $s^2-4p=(-1)^2-4\times(-6)=25\geqslant 0$. Ce sont les solutions de l'équation $x^2-x-6=0$: $\frac{1-\sqrt{25}}{2}=-2$ et $\frac{1+\sqrt{25}}{2}=3$.

2.3.11 Exemples de résolution d'équations du second degré et, conjointement, de factorisation de ax^2+bx+c

2.3.11.1 Maintenant que l'on en sait davantage, si l'on détermine une solution (évidente ou pas, par un moyen ou par un autre) de $ax^2+bx+c=0$ alors, d'après la remarque **2.3.5.1**, on est sûr soit qu'il y en a une autre distincte de celle-là soit « qu'elle se répète » (solution double). Ce qui est sûr, c'est qu'il y en a une autre. Comment la trouver ?

Voici des exemples.

— Soit (E) : $x^2+4x-5=0$. On la résout de différentes façons.

D'après **2.3.2.2**, on sait que 1 est solution évidente de (E).
Donc x^2+4x-5 se factorise en un produit de trois facteurs. Sur les trois, on en connaît deux. L'un est $a=1$ et l'autre $x-1$: $x^2+4x-5=1\times(x-1)\times(x-\boxed{})$. Pour trouver ce qui manque dans le troisième, on s'intéresse au terme constant de x^2+4x-5 qui est -5 et on se demande par quel nombre multiplier -1 pour trouver -5. Réponse évidente : c'est 5 car $(x-1)(x-(-5))=x^2+4x-5$. Les solutions de (E) sont donc 1 et -5.

Puisque 1 est solution évidente de (E),

$$\begin{aligned}x^2+4x-5 &= x^2+4x-5-0 = x^2+4x-5-(1^2+4\times 1-5)\\ &= x^2-1^2+4(x-1)\\ &= (x-1)(x+1)+4(x-1)\\ &= (x-1)(x+1+4)\\ &= (x-1)(x+5)\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S} = \{1\,;-5\}$.

Puisque $x_1 = 1$ est une solution de (E), 1 est une racine du polynôme $x \mapsto x^2+4x-5$. Pour trouver l'autre racine x_2 de ce polynôme, on utilise soit la somme soit le produit de ses racines.
Si on utilise la somme, on a $x_1+x_2 = -\frac{4}{1} = -4$. Comme $x_1 = 1$, on a $x_2 = -4-1 = -5$.
Si on utilise le produit, on a $x_1x_2 = \frac{-5}{1} = -5$. Comme $x_1 = 1$, on a $x_2 = \frac{-5}{1} = -5$.
Quel que soit le choix (somme ou produit), on trouve ainsi l'ensemble des solutions de (E) : $\mathscr{S} = \{1\,;-5\}$.

— Soit (E) : $2x^2+3x-2 = 0$. On résout (E) de différentes façons.

-2 est solution évidente de (E) car $2\times(-2)^2+3\times(-2)-2 = 8-6-2 = 0$.
2 et $(x+2)$ sont deux des trois facteurs dans la factorisation de $2x^2+3x-2$.
Comme $2(x+2) = 2x+4$ et que $(2x+4)(x-\frac{1}{2}) = 2x^2+3x-2$ (le nombre par lequel on multiplie 4 pour trouver -2 est $-\frac{1}{2}$), l'autre solution de (E) est $\frac{1}{2}$.

Puisque -2 est solution évidente de (E),

$$\begin{aligned}2x^2+3x-2 &= 2x^2+3x-2-0 = 2x^2+3x-2-(2(-2)^2+3\times(-2)-2)\\ &= 2x^2-2(-2)^2+3(x+2)\\ &= 2(x+2)(x-2)+3(x+2)\\ &= (x+2)(2(x-2)+3)\\ &= (x+2)(2x-1)\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S} = \left\{-2\,;\frac{1}{2}\right\}$.

Il peut arriver que l'on trouve deux solutions évidentes. $x^2+x-2 = 0$ admet 1 pour solution car $1^2+1-2 = 2-2 = 0$ et aussi -2 car $(-2)^2-2-2 = 4-4 = 0$.
L'équation étant de degré 2, ses solutions sont 1 et -2.

Le réel $x_1 = -2$ est solution de (E). Soit x_2 l'autre solution. On a $x_1+x_2 = -\frac{3}{2}$. Donc $x_2 = -\frac{3}{2}-x_1 = -\frac{3}{2}+2 = \frac{1}{2}$.
On a $x_1x_2 = \frac{-2}{2} = -1$. Donc $x_2 = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$.
Les solutions de (E) sont donc -2 et $\frac{1}{2}$.

2.3.11.2 Lorsqu'on résout une équation du second degré, on peut aussi commencer par calculer le discriminant Δ, déterminer son signe et en fonction de celui-ci conclure quant à l'existence de solutions puis effectuer leur calcul.

Voici quelques exemples de cette méthode.

— Soit (E) : $x^2+4x-5 = 0$. $a = 1$, $b = 4$ et $c = -5$.
Le discriminant de (E) est $\Delta = 4^2-4\times 1\times(-5) = 36 > 0$.
(E) admet donc deux solutions : $\frac{-4-6}{2} = -5$ et $\frac{-4+6}{2} = 1$.

- Soit (E) : $-x^2+2x+1=0$. $a=-1$, $b=2$ et $c=1$.
  Le discriminant de (E) est $\Delta=2^2-4\times(-1)\times 1=8$.
  Comme $8>0$, (E) admet deux solutions : $\frac{-2-\sqrt{8}}{-2}=\frac{-2-2\sqrt{2}}{-2}=1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$.
- Soit (E) : $-2x^2+\sqrt{3}x-5=0$. $a=-2$, $b=\sqrt{3}$ et $c=-5$.
  Le discriminant de (E) est $\Delta=\sqrt{3}^2-4\times(-2)\times(-5)=-37$. Puisque $-37<0$, (E) n'admet pas de solution.
- Soit (E) : $\frac{1}{4}x^2-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{4}=0$. $a=\frac{1}{4}$, $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $c=\frac{3}{4}$.
  Le discriminant de (E) est $\Delta=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-4\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}=0$. (E) admet donc une solution : $-\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\times\frac{1}{4}}=\sqrt{3}$.

2.3.11.3 Pour résoudre une équation du second degré, on peut également déterminer la forme canonique de ax^2+bx+c et étudier ensuite si cette forme se factorise ou pas. De cette alternative, on déduit l'ensemble des solutions. Dans cette méthode, on calcule aussi le discriminant. Son signe décide de la poursuite ou non des calculs. Il n'intervient pas au même moment dans ceux-ci par rapport à la méthode précédente et c'est ce qui l'en différencie.

On peut consulter *avec profit* les exemples de la sous-sous-section **2.3.2.2**.

En voici d'autres.

- x^2-5 est déjà sous forme canonique... et puisque $x^2-5=(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$, les solutions de $x^2-5=0$ sont $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.
- $x^2+2x=(x+1)^2-1=(x+1-1)(x+1+1)=x(x+2)$.
  Les solutions de $x^2+2x=0$ sont donc 0 et -2.
- $16x^2+\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}=\left(4x+\frac{1}{3}\right)^2$ n'est pas la forme canonique de $16x^2+\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}$ (pourquoi ?) ;
  Pour la trouver, deux manières.
  La première : $\left(4x+\frac{1}{3}\right)^2=\left(4\left(x+\frac{1}{12}\right)\right)^2=16\left(x+\frac{1}{12}\right)^2$.
  La seconde : $16x^2+\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}=16\left(x^2+\frac{1}{6}x\right)+\frac{1}{9}=16\left(\left(x+\frac{1}{12}\right)^2-\frac{1}{144}\right)+\frac{1}{9}=16\left(x+\frac{1}{12}\right)^2-\frac{16}{144}+\frac{1}{9}=16\left(x+\frac{1}{12}\right)^2$.
  $16x^2+\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}=0$ admet donc une solution : $-\frac{1}{12}$.
- $$\begin{aligned}-2x^2-x-3 &= -2\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\\ &= -2\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}+\frac{3}{2}\right)\\ &= -2\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{16}\right)\end{aligned}$$
  Puisque $-2<0$ et $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{16}>0$, $-2\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{16}\right)<0$.
  On en déduit que $-2x^2-x-3=0$ n'admet pas de solution.
- $$\begin{aligned}6x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} &= 6\left(x^2-\frac{1}{12}x-\frac{1}{12}\right)\\ &= 6\left(\left(x-\frac{1}{24}\right)^2-\frac{1}{576}-\frac{1}{12}\right)\\ &= 6\left(\left(x-\frac{1}{24}\right)^2-\frac{1}{576}-\frac{48}{576}\right)\\ &= 6\left(\left(x-\frac{1}{24}\right)^2-\frac{49}{576}\right)\end{aligned}$$
  On peut continuer les calculs puisqu'entre parenthèses, figure la différence entre deux carrés.

$$\begin{aligned}6x^2-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2} &= 6\left(\left(x-\tfrac{1}{24}\right)^2-\left(\tfrac{7}{24}\right)^2\right)\\ &= 6\left(x-\tfrac{1}{24}-\tfrac{7}{24}\right)\left(x-\tfrac{1}{24}+\tfrac{7}{24}\right)\\ &= 6\left(x-\tfrac{8}{24}\right)\left(x+\tfrac{6}{24}\right)\\ &= 6\left(x-\tfrac{1}{3}\right)\left(x+\tfrac{1}{4}\right)\end{aligned}$$

$6x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0$ admet donc deux solutions : $\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{4}$.

2.3.11.4 **Vérifier** que l'on trouve bien le même ensemble de solution(s) lorsqu'on résout
- (E) : $-2x^2+\sqrt{3}x-5=0$ *via* la forme canonique ;
- (E) : $6x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0$ *via* le discriminant.

2.3.11.5 **Que choisir ?** On peut commencer par étudier s'il existe une solution évidente. Sinon, le procédé qui consiste à calculer le discriminant puis à déterminer son signe est peut-être plus mécanique et pas forcément plus rapide que celui qui mène à la forme canonique. Ce dernier permet de ne plus faire apparaître x qu'une seule fois et cela présente un intérêt qui va au-delà de la résolution d'une équation du second degré... Des exemples l'illustreront dans ce chapitre (lors de la résolution d'inéquations du second degré) et aussi au sein des futurs chapitres.

2.3.11.6 Dans le cas particulier où on doit résoudre une équation du type $ax^2+c=0$, b étant nul, il est *maladroit* (même si cela mène à la résolution de (E), c'est le théorème 2.3.3 qui l'assure) de calculer le discriminant pour résoudre l'équation, un calcul direct s'impose (comme celui effectué en début de sous-section 2.1). Il en est de même lorsqu'on résout une équation du type $ax^2+bx=0$ où $c=0$. Et il en est encore de même si l'on *détecte* que l'on peut appliquer une identité remarquable ou s'il y a une factorisation évidente.

On peut consulter *avec fruit* les exemples de la sous-section 2.1.

2.3.12 Réponse aux problèmes de la sous-section 2.2

2.3.12.1 Réponse au *problème de nature algébrique* de la sous-sous-section 2.2.2.

On doit résoudre $-x^2+29x-198=0$. $\Delta=29^2-4\times(-1)\times(-198)=49>0$. Cette équation admet donc deux solutions $\frac{-29-7}{-2}=18$ et $\frac{-29+7}{-2}=11$.

Le système à résoudre a les mêmes solutions que les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y &=& 29-x\\ x=18 & \text{ou} & x=11\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} y=29-18 \quad \text{ou} \quad y=29-11\\ x=18 \quad \text{ou} \quad x=11\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} y=11 \quad \text{ou} \quad y=18\\ x=18 \quad \text{ou} \quad x=11\end{array}\right.$$

Les solutions du système sont donc les couples $(18\,;11)$ et $(11\,;18)$.

Conclusion : il existe deux nombres répondant à la question à savoir 18 et 11.

2.3.12.2 Réponse au *problème de nature électrique* de la sous-sous-section 2.2.3.

On cherche s'il existe deux réels strictement positifs R_1 et R_2 tels que $\left\{\begin{array}{rcl} R_1+R_2 &=& 2{,}5\\ \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} &=& \frac{1}{0{,}4}\end{array}\right.$

On a successivement

$$\left\{\begin{array}{rcl} R_1+R_2 &=& 2{,}5\\ \frac{R_2+R_1}{R_1R_2} &=& \frac{1}{0{,}4}\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} R_1+R_2 &=& 2{,}5\\ \frac{2{,}5}{R_1R_2} &=& \frac{5}{2}\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} R_1+R_2 &=& 2{,}5\\ R_1R_2 &=& 1\end{array}\right.$$

puis $\begin{cases} R_1 &= 2{,}5 - R_2 \\ (2{,}5 - R_2) \times R_2 &= 1 \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} R_1 &= 2{,}5 - R_2 \\ -R_2^2 + 2{,}5R_2^2 - 1 &= 0 \end{cases}$

On résout $-R_2^2 + 2{,}5R_2^2 - 1 = 0$. $\Delta = 2{,}5^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = 2{,}25 > 0$. Donc l'équation admet deux solutions $R_2 = \frac{-2{,}5-1{,}5}{-2} = 2$ ou $R_2 = \frac{-2{,}5+1{,}5}{-2} = 0{,}5$.

Le système à résoudre a les mêmes solutions que les systèmes suivants :

$\begin{cases} R_1 = 2{,}5 - R_2 \\ R_2 = 2 \quad \text{ou} \quad R_2 = 0{,}5 \end{cases}$ $\begin{cases} R_1 = 2{,}5 - 2 \quad \text{ou} \quad R_1 = 2{,}5 - 0{,}5 \\ R_2 = 2 \quad \text{ou} \quad R_2 = 0{,}5 \end{cases}$

$\begin{cases} R_1 = 0{,}5 \quad \text{ou} \quad R_1 = 2 \\ R_2 = 2 \quad \text{ou} \quad R_2 = 0{,}5 \end{cases}$

Les solutions du système sont donc les couples $(0{,}5\,;2)$ et $(2\,;0{,}5)$.

Conclusion : il existe deux résistances répondant à la question, à savoir 2 et 0,5.

2.3.12.3 Réponse au *problème de nature géométrique* de la sous-sous-section 2.2.4.

On cherche s'il existe un réel x tel que l'aire de $ABCD$ qui est $\frac{6+(6-x)}{2} \times x$ est égale à 10.

x doit être plus grand que 0 et plus petit que 6.

On doit donc résoudre l'équation $\frac{12-x}{2} \times x = 10$ dans l'intervalle $[0\,;6]$.

Elle a le même ensemble de solutions que $12x - x^2 = 20$ c'est-à-dire $-x^2 + 12x - 20 = 0$.

On a

$$\begin{aligned} -x^2 + 12x - 20 &= -(x^2 - 12x + 20) \\ &= -((x-6)^2 - 36 + 20) \\ &= -((x-6)^2 - 16) \\ &= -((x-6-4) \times (x-6+4) \\ &= -(x-10) \times (x-2) \end{aligned}$$

Les solutions de $-(x-10) \times (x-2) = 0$ sont celles de $x - 10 = 0$ ou $x - 2 = 0$ c'est-à-dire celles de $x = 10$ ou $x = 2$.

10 ne convient pas car $10 \notin [0\,;6]$. Seul 2 convient car $2 \in [0\,;6]$. C'est la solution du problème posé.

2.3.12.4 Réponse au *problème de nature économique* de la sous-sous-section 2.2.5.

Le réel t est strictement positif et est solution de l'équation (E) : $10\,000(1+t\%)(1+(t+1)\%) = 11\,130$.

Les équations suivantes ont le même ensemble de solutions que (E) :

$$\left(\frac{100+t}{100}\right) \times \left(\frac{100+t+1}{100}\right) = \frac{11\,130}{10\,000}$$
$$(100+t) \times (101+t) = 11\,130$$
$$t^2 + 100t + 101t + 10\,100 = 11\,130$$
$$t^2 + 201t - 1\,030 = 0$$

Le discriminant de $t^2 + 201t - 1\,030 = 0$ est $\Delta = 201^2 - 4 \times 1 \times (-1\,030) = 44521$.
Comme $\Delta > 0$, $t^2 + 201t - 1\,030 = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$:
$t_1 = \frac{-201-\sqrt{44521}}{2} = \frac{-201-211}{2} = -206$ et $t_2 = \frac{-201+\sqrt{44521}}{2} = \frac{10}{2} = 5$.
t_1 ne convient pas puisque $t_1 < 0$. Le capital de $10\,000$ € a donc été placé au taux de 5%.

2.3.12.5 Réponse au *problème de partage* de la sous-sous-section 2.2.6.
Soient n le nombre de personnes et p la part de chacune d'elle. n et p sont deux entiers strictement positifs et ils sont les solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} np &=& 4\,000 \\ (n-4)(p+50) &=& 4\,000 \end{array}\right.$$

On a $\left\{\begin{array}{rcl} np &=& 4\,000 \\ np+50n-4p-200 &=& 4\,000 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{rcl} np &=& 4\,000 \\ 4\,000+50n-4p-200 &=& 4\,000 \end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{rcl} np &=& 4\,000 \\ 50n-4p &=& 200 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{rcl} np &=& 4\,000 \\ 25n-2p &=& 100 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{rcl} p &=& \frac{4\,000}{n} \\ 25n-\frac{8\,000}{n} &=& 100 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} p &=& \frac{4\,000}{n} \\ 25n^2-100n-8000 &=& 0 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{rcl} p &=& \frac{4\,000}{n} \\ n^2-4n-320 &=& 0 \end{array}\right.$$

Résolution de $n^2-4n-320=0$. $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-320) = 1296$. Comme $\Delta > 0$, cette équation admet deux solutions dans $\mathbb{R}$: $n_1 = \frac{4-36}{2} = -16$ et $n_2 = \frac{4+36}{2} = 20$. Seul n_2 convient puisque $n_1 < 0$.
Le système à résoudre a donc les mêmes solutions que les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcl} p &=& \frac{4\,000}{n} \\ n &=& 20 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{rcl} p &=& \frac{4\,000}{20} \\ n &=& 20 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{rcl} p &=& 200 \\ n &=& 20 \end{array}\right.$$

Donc il y avait 20 personnes et la part des personnes restantes s'élève à 200 €.

2.3.13 Interprétation graphique

Soient $f\ : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative d'équation $y = f(x)$ dans un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

— Si $\Delta > 0$, $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en deux points distincts d'abscisses x_1 et x_2.
— Si $\Delta = 0$, $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse x_0.
— Si $\Delta < 0$, $\mathscr{C}$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

2.3.14 Remarque

Là encore, il y a disjonction des cas.

2.3.15 Exemples

2.3.15.1 $\mathscr{C}$: $y = x^2 + 5x - 15$ coupe l'axe des abscisses en deux points car $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 85 > 0$.

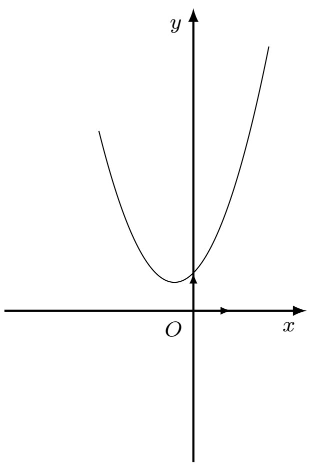
2.3.15.2 $\mathscr{C}$: $y = (x - 15)^2$ coupe l'axe des abscisses en un point car c'est la forme canonique de $x \mapsto x^2 - 30x + 225$ ce qui entraîne que $\Delta = 0$.

2.3.15.3 $\mathscr{C}$: $y = x^2 + 5x + 15$ ne coupe pas l'axes des abscisses car $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 15 = -35 < 0$.

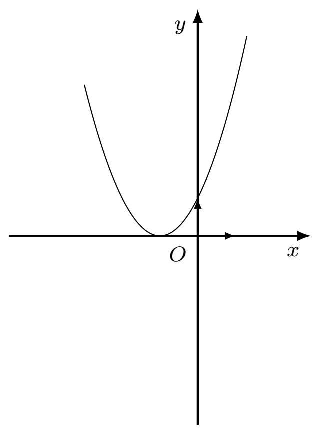
2.3.16 Exercice

Dans le plan rapporté à un repère, étudier l'intersection de $\mathscr{C}$: $y = -x^2 + 4x - 2$ avec les axes de coordonnées.

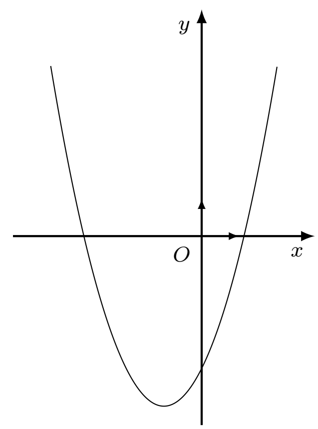
2.3.17 Zoologie des paraboles



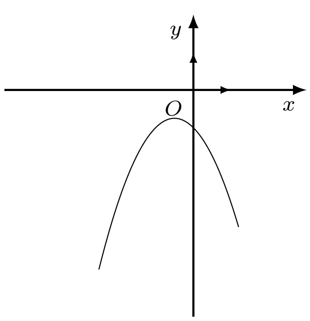
(a) $a > 0$ et $\Delta < 0$



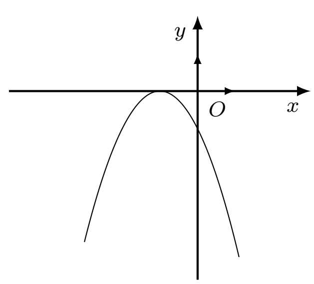
(b) $a > 0$ et $\Delta = 0$



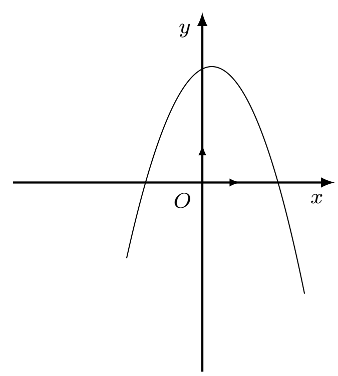
(c) $a > 0$ et $\Delta > 0$



(a) $a < 0$ et $\Delta < 0$



(b) $a < 0$ et $\Delta = 0$



(c) $a < 0$ et $\Delta > 0$

FIGURE 9 – Zoologie des paraboles

2.4 Détermination des fonctions polynômes du second degré s'annulant en deux nombres réels distincts

2.4.1 Théorème

Soient P et Q deux polynômes du second degré admettant chacun deux racines distinctes. Alors

$$(P \text{ et } Q \text{ ont les mêmes racines}) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ Q(x) = kP(x))$$

Démonstration

— $\Rightarrow$
Puisque P et Q sont deux polynômes du second degré, pour tout réel x, $P(x) = ax^2 + bx + c$ et $Q(x) = a'x^2 + b'x + c'$.
Soient r_1 et r_2 les racines communes à P et Q.
Alors, pour tout réel x, $P(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ et $Q(x) = a'(x - r_1)(x - r_2)$.
Puisque a' n'est pas nul, $(x-r_1)(x-r_2) = \frac{P(x)}{a}$ ce qui entraîne $Q(x) = a' \times \frac{P(x)}{a}$ puis $Q(x) = kP(x)$ en posant $k = \frac{a'}{a}$.

— $\Leftarrow$
Réciproquement, soit r une racine de P ($r = r_1$ ou $r = r_2$). Démontrons que r est aussi une racine de Q.
On a $Q(r) = kP(r) = k \times 0$ car r étant une racine de P, $P(r) = 0$. Donc $Q(r) = 0$.
On en déduit que r est aussi une racine de Q. D'où P et Q ont les mêmes racines. ■

2.4.2 Remarque

$Q(x) = kP(x)$ signifie que les cœfficients de P et Q sont proportionnels : $a' = ka$, $b' = kb$ et $c' = kc$.

2.4.3 Exercice : utilisation du théorème précédent

2.4.3.1 Soient P et Q deux polynômes du second degré admettant chacun deux racines distinctes. Soient $\mathscr{C}_P$ et $\mathscr{C}_Q$ leurs courbes représentatives respectives. Démontrer que si P et Q ont les mêmes racines alors $\mathscr{C}_P$ et $\mathscr{C}_Q$ ont le même axe de symétrie.

2.4.3.2 Étudier la réciproque.

RÉPONSE

2.4.3.1 L'axe de symétrie de $\mathscr{C}_Q$ a pour équation $x = -\frac{b'}{a'}$. Puisque P et Q ont les mêmes racines, leurs cœfficients sont proportionnels.
Il existe donc un réel k tel que $a' = ka$ et $b' = kb$. D'où $-\frac{b'}{2a'} = -\frac{kb}{2ka} = -\frac{b}{2a}$. Donc $\mathscr{C}_P$ et $\mathscr{C}_Q$ ont le même axe de symétrie.

2.4.3.2 La réciproque est fausse.
En effet, soient $P\ : x \mapsto x^2 - 1$ et $Q\ : x \mapsto x^2 - 2$. $\mathscr{C}_P$ et $\mathscr{C}_Q$ admettent l'axe des ordonnées pour axe de symétrie. Les racines de P sont 1 et -1. Les racines de Q sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. Donc aucune racine de P n'est une racine de Q.

3 Inéquations du second degré dans $\mathbb{R}$

3.1 Inéquations du second degré particulières

3.1.1 Résoudre (I) : $(x - 2) \times (-x + 3) > 0$.

3.1.2 Résoudre (I) : $\frac{-2x+5}{4x+7} \leqslant 0$.

3.2 Inéquations du second degré : cas général

3.2.1 Définition

Soient a un réel *non nul*, b et c deux réels. On appelle *inéquation du second degré* une inéquation du type

$$ax^2 + bx + c \begin{cases} < 0 \\ \leqslant 0 \\ > 0 \\ \geqslant 0 \end{cases}$$

3.2.2 Théorème : signe de $ax^2 + bx + c$ en fonction de x

Soient a un réel non nul, b et c deux réels. On note toujours $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
Soit x un réel. Alors

- si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c$ est
  - du signe de a si $x \in]-\infty\,;x_1] \cup [x_2\,;+\infty[$;
  - du signe de $-a$ si $x \in]x_1\,;x_2[$;
  - nul en x_1 et x_2 ;

    que l'on peut présenter sous la forme d'un tableau de signes :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		$\text{sgn}(a)$	0	$\text{sgn}(-a)$	0	$\text{sgn}(a)$	

- si $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c$ est
  - du signe de a si $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$;
  - nul en $-\frac{b}{2a}$;

  que l'on peut présenter sous la forme d'un tableau de signes :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax^2+bx+c		$\text{sgn}(a)$	0	$\text{sgn}(a)$	

- si $\Delta < 0$, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour tout réel x, que l'on peut présenter sous la forme d'un tableau de signe

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		$\text{sgn}(a)$	

Démonstration
On note $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- 1^{er} cas : $\Delta > 0$. Alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
  On note $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)$. Alors $f(x) = aP(x)$. On suppose que $x_1 < x_2$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x-x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\text{sgn}(a)$	0	$\text{sgn}(-a)$	0	$\text{sgn}(a)$	

Justification des signes de la dernière ligne du tableau.
$f(x)$ est le produit de a par $P(x)$;
— comme $P(x) > 0$ dans $]-\infty\,;x_1[\cup]x_2\,;+\infty[$, $f(x)$ est du signe de a dans cet réunion d'intervalles ;
— comme $P(x) < 0$ dans $[x_1\,;x_2]$, $-P(x) > 0$, et puisque $f(x) = -a \times (-P(x))$, $f(x)$ est du signe de $-a$ dans cet intervalle.

— 2ᵉ cas : $\Delta = 0$. Alors $f(x) = a(x-x_0)^2$.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$(x-x_0)^2$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\text{sgn}(a)$	0	$\text{sgn}(a)$	

— 3ᵉ cas : $\Delta < 0$. On note $Q(x) = \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}$. Alors $f(x) = aQ(x)$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	
$f(x)$		$\text{sgn}(a)$	

Comme $Q(x) > 0$ pour tout réel x (voir la démonstration du théorème 2.3.3), $f(x)$ est du signe de a pour tout réel x.■

3.2.3 Remarques

3.2.3.1 Le théorème 3.2.2 dit que ax^2+bx+c est presque toujours du signe de a. Il ne l'est pas aux éventuelles solutions de $ax^2+bx+c=0$ et si $\Delta > 0$ dans l'intervalle $]x_1\,;x_2[$.

3.2.3.2 Le théorème 3.2.2 est structuré suivant une disjonction des cas.

3.2.3.3 Dans le cas où $\Delta > 0$, on dit traditionnellement que ax^2+bx+c est du signe de a *à l'extérieur des racines* et du signe contraire de a *entre les racines*. Pourquoi pas, à condition de savoir de quoi on parle…

3.2.4 Exercice

En reprenant la zoologie du 2.3.17, retrouver graphiquement le signe de ax^2+bx+c en fonction de x.

3.2.5 Exemples

3.2.5.1 Pour connaître le signe de ax^2+bx+c, on peut commencer par résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$, puis ranger ses éventuelles solutions par ordre croissant et enfin conclure grâce au théorème 3.2.2.
Voici quelques exemples.

— Déterminer le signe de x^2-4x+1.
On résout (E) : $x^2-4x+1=0$.
$\Delta=(-4)^2-4\times1\times1=12>0$. Donc (E) admet deux solutions $\frac{4-\sqrt{12}}{2}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$ et $2+\sqrt{3}$.
Comme $a=1>0$, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2-4x+1		$+$	0	$-$	0	$+$	

— Déterminer le signe de $3x-\frac{1}{x}-2$.
Pour tout $x\neq0$, $3x-\frac{1}{x}-2=\frac{3x^2-2x-1}{x}$.
On résout (E) : $3x^2-2x-1=0$. $\Delta=(-2)^2-4\times3\times(-1)=4+12=16$. Comme $\Delta>0$, (E) admet deux solutions $\frac{2+4}{6}=1$ et $\frac{2-4}{6}=-\frac{1}{3}$.
Le signe de $\frac{3x^2-2x-1}{x}$ est indiqué dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		1		$+\infty$
$3x^2-2x-1$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	||	$+$		$+$	
$\frac{3x^2-2x-1}{x}$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

La seconde ligne du tableau se justifie par le fait que le coefficient du terme en x^2, égal à 3, est >0.

3.2.5.2 Pour connaître le signe de ax^2+bx+c, on peut aussi déterminer sa forme canonique et dans certains cas, on peut se passer d'utiliser le théorème 3.2.2.
Exemple : déterminer le signe de $-x^2+4x-5$.
Pour tout réel x, $-x^2+4x-5=-(x^2-4x+5)=-((x-2)^2+1)<0$.

3.2.5.3 Lorsque l'on résout une inéquation du second degré $ax^2+bx+c<0$ (ou $\leqslant 0$ ou >0 ou $\geqslant 0$), on commence aussi par résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$, on range ses éventuelles solutions par ordre croissant, on utilise le théorème 3.2.2 puis on conclut en puisant dans la ou les bonne(s) case(s) du tableau de signes.
Des exemples.

— Résoudre (I) : $x^2-4x+1>0$.
On procède comme pour le premier exemple de la sous-sous-section **3.2.5.1** et en suivant le tableau de signes, on conclut : $\mathscr{S}=]-\infty\,;2-\sqrt{3}[\cup]2+\sqrt{3}\,;+\infty[$.

— De même, l'ensemble des solutions de $x^2-4x+1\leqslant0$ est $\mathscr{S}=[2-\sqrt{3}\,;2+\sqrt{3}]$.

— Résoudre (I) : $3x-\frac{1}{x}-2\geqslant0$.
On procède comme pour l'exemple de la sous-sous-section **3.2.5.1** et en suivant le tableau de signes, on conclut : $\mathscr{S}=\left[-\frac{1}{3}\,;0\right[\cup[1\,;+\infty[$.

— Résoudre (I) : $-2x^2+7x-5>0$.
On résout (E) : $-2x^2+7x-5=0$.
$\Delta=7^2-4\times(-2)\times(-5)=9>0$. (E) admet donc deux solutions : $\frac{-7-3}{-4}=\frac{5}{2}$ et $\frac{-7+3}{-4}=1$.

Puisque $a = -2 < 0$, le signe de $-2x^2 + 7x - 5$ est fourni par le tableau suivant :

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$-2x^2 + 7x - 5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que $\mathscr{S} = \left]1\,;\frac{5}{2}\right[$.

— Résoudre (I) : $(x-3)(x-2) \geqslant 0$.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$(x-3)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de (I) est donc $\mathscr{S} =]-\infty\,;2] \cup [3\,;+\infty[$.

3.2.5.4 La résolution d'une inéquation du second degré peut se faire sans utiliser le théorème 3.2.2.
Exemple : résoudre (I) : $-x^2 + 4x - 5 < 0$.
On procède comme pour l'exemple de la sous-sous-section **3.2.5.2** et en suivant
$-((x-2)^2 + 1) < 0$, on conclut : $\mathscr{S} = \mathbb{R}$.
De même, l'ensemble des solutions de $-x^2 + 4x - 5 > 0$ est $\mathscr{S} = \varnothing$.

4 Utilisation d'un logiciel de calcul formel

4.1 Xcas

4.1.1 `canonical_form`$(2x^2 - 12x + 1)$ renvoie $2*(x-3)^2 - 17$.

4.1.2 `solve`$(2x^2 + 5x + 2 = 0,x)$ ou `solve`$(2x^2 + 5x + 2 = 0)$ renvoie $\left[-2, -\frac{1}{2}\right]$.

4.1.3 `factor`$(2x^2 - 12x + 1)$ renvoie $(x + \frac{\sqrt{34}-6}{2}) * (2*x - \sqrt{34} - 6)$.

4.1.4 `solve`$(x^2 - 4x + 1 > 0,x)$ renvoie $[x < (-(\sqrt{3}) + 2),\ x > (\sqrt{3} + 2)]$ qui s'interprète comme
$\mathscr{S} =]-\infty\,;2-\sqrt{3}[\cup]2+\sqrt{3}\,;+\infty[$.

4.2 Maxima

4.2.1 `solve`$(2*x^2 + 5*x + 2 = 0,x)$; ou `solve`$(2*x^2 + 5*x + 2 = 0)$; ou `solve`$(2*x^2 + 5*x + 2)$; ou `solve`$(2*x^2 + 5*x + 2,x)$; renvoient $[x = -\frac{1}{2}, x = -2]$.

4.2.2 `solve`$(0.5*x^2 + (-1 - \mathtt{sqrt}(3)/2)*x + \mathtt{sqrt}(3))$; renvoie $[x = \sqrt{3}, x = 2]$.

4.2.3 `factor`$(2*x^2 - 12*x + 1)$; renvoie $2*x^2 - 12*x + 1$: c'est la même chose et je ne suis parvenu à savoir pourquoi.

4.2.4 `factor`$(-2*x^2 + 7*x - 5)$; renvoie $-(x-1)(2x-5)$.

4.2.5 `factor`$(0.5*x^2 + (-1 - \mathtt{sqrt}(3)/2)*x + \mathtt{sqrt}(3))$; renvoie $\frac{(x-2)(x-\sqrt{3})}{2}$.

4.2.6 `solve`$(x^2 + 4*x - 5 > 0,x)$; renvoie *solve : cannot solve inequalities. - - an error.* : *Maxima* semble ne pas être capable de résoudre une inéquation.

4.3 Mathematica via WolframAlpha

4.3.1 `canonicalform`$(x^2 + 4x + 5)$ ou `canonicalform`$(x^2 + 4x + 5)$ ou `simplify`$(x^2 + 4x + 5)$ renvoient $(x+2)^2 + 1$.

4.3.2 `solve`$(2*\mathtt{x}^2+5*\mathtt{x}+2=0,\mathtt{x})$; ou `solve`$(2*\mathtt{x}^2+5*\mathtt{x}+2=0)$; ou `solve`$(2*\mathtt{x}^2+5*\mathtt{x}+2)$; ou `solve`$(2*\mathtt{x}^2+5*\mathtt{x}+2,\mathtt{x})$; renvoient
$\mathtt{x}=-\frac{1}{2}$
$\mathtt{x}=-2$.

4.3.3 `factor`$(2\mathtt{x}^2-12\mathtt{x}+1)$ renvoie $-\frac{1}{2}(-2\mathtt{x}+\sqrt{34}+6)(2\mathtt{x}+\sqrt{34}-6)$.

4.3.4 `solve`$(\mathtt{x}^2+4\mathtt{x}+5>0,\mathtt{x})$ renvoie $\mathtt{x}\in\mathbb{R}$ qui s'interprète comme $\mathscr{S}=\mathbb{R}$.

5 Synthèses

5.1 Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{R}$

$ax^2 + bx + c = 0$

Calcul de $\Delta = b^2 - 4ac$ puis étude de son signe

Forme canonique de $ax^2 + bx + c$: $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$ puis détermination éventuelle de sa forme factorisée

Solution évidente r ; on trouve l'autre

en factorisant $ax^2 + bx + c - (ar^2 + br + c)$

en utilisant la somme ou le produit des solutions

5.2 Équivalences entre existence de solution(s) et factorisation de ax^2+bx+c

$\Delta > 0$: deux solutions distinctes x_1, x_2

$\Delta = 0$: une solution *double*

$\Delta < 0$: pas de solution dans $\mathbb{R}$

$\Updownarrow$

$\boxed{\begin{array}{l} ax^2 + bx + c = 0 \\ ax^2 + bx + c \end{array}}$

$\Updownarrow$

$\Delta > 0$: factorisation en trois facteurs, l'un est constant et les deux autres sont distincts et du premier degré :
$a \times (x - x_1) \times (x - x_2)$

$\Delta = 0$: factorisation en trois facteurs, l'un est constant et les deux autres sont les mêmes :
$a \times (x - x_0)^2$

$\Delta < 0$: pas de factorisation dans $\mathbb{R}$

Remarque
Il y a aussi équivalence entre le Nord et le Sud (enfin, vous avez compris. . .) mais la présence d'un

cadre au centre du schéma empêche de le faire apparaître.

6 Logique : la disjonction des cas

6.1 Dans ce cours...

Il a été quatre fois question de « disjonction des cas » : une première fois dans le théorème 2.3.3, une seconde dans le corollaire 2.3.6, une troisième dans l'interprétation graphique de la sous-sous-section 2.3.13 et une quatrième dans le théorème 3.2.2.

Dans chaque résultat, on trouve des propositions du type « si *une condition suffisante* alors *une condition nécessaire* ».

Par exemple, dans le théorème 3.2.2, on trouve

$$\text{si } \Delta < 0 \text{ alors } ax^2 + bx + c \text{ est du signe de } a \text{ pour tout réel } x$$

La condition suffisante est « $\Delta < 0$ ».

La condition nécessaire est « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour tout réel x ».

Le mot *alors* est parfois omis : il est sous-entendu et remplacé par une virgule.

6.2 ...et au-delà...

En général, face à une proposition du type « si *une condition suffisante* alors *une condition nécessaire* », on ne peut rien dire de la réciproque c'est-à-dire de la proposition où *suffisante* prend la place de *nécessaire* et vice-versa. En général cette réciproque est fausse.

Par exemple, dans l'ensemble $\mathbb{N}$, la proposition « si n est multiple de 4 alors n est un multiple de 2 » est vraie. En effet, si n est un multiple de 4 alors il existe un entier positif k tel que $n = 4k$ et donc $n = 2(2k)$ ce qui permet d'affirmer que n est un multiple de 2.

Mais la réciproque « si n est multiple de 2 alors n est un multiple de 4 » est fausse. En effet, 66 est un multiple de 2 car $66 = 2 \times 33$ et 33 n'est pas un multiple de 4 car 33 est impair.

Parfois, c'est vrai. C'est le cas du théorème de Pythagore.

Étant donné un triangle ABC,

— si ABC est rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

— si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors ABC est rectangle en A.

6.3 ...pour y revenir

Dans le cas d'un résultat où une disjonction des cas est en jeu, la réciproque d'une proposition du type « si *une condition suffisante* alors *une condition nécessaire* » est vraie. Il s'agit donc d'une *équivalence*. Il en apparaît trois dans la section 5.2.

Reprenons le même exemple que dans la sous-section 6.1 :

$$\text{si } \Delta < 0,\ ax^2 + bx + c \text{ est du signe de } a \text{ pour tout réel } x$$

La réciproque

$$\text{si } ax^2 + bx + c \text{ est du signe de } a \text{ pour tout réel } x \text{ alors } \Delta < 0$$

est vraie.

Cela signifie que si $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$ pour tout réel x alors $\Delta < 0$.

Et on peut enchaîner en combinant plusieurs résultats du cours, l'un direct et l'autre réciproque. D'après le corollaire 2.3.6, si $\Delta < 0$ alors $ax^2 + bx + c$ ne se factorise pas.

Donc si $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$ pour tout réel x alors $ax^2 + bx + c$ ne se factorise pas.

7 Solution de l'exercice de la sous-section 1.10

Pour chaque fonction polynôme f, déterminer son sens de variation, son extremum, le réel en lequel il est atteint, son tableau de variation, sa forme canonique, la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 0$, le signe de $f(x)$ en fonction de x ainsi que les coordonnées du sommet et l'axe de symétrie de la parabole la représentant. Terminer par le tracé de cette parabole.

1. $\boxed{f\ : x \mapsto x^2 + x}$
   - $a = 1$, $b = 1$ et $c = 0$. $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 0 = 1$, $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$.
   - Sens de variation de f. $1 > 0$. Donc f est strictement décroissante dans $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right]$ et strictement croissante dans $\left[-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.
   - Extremum de f. f admet un minimum égal à $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4}$, atteint en $-\frac{1}{2}$.
   - Tableau de variations de f, complété avec les solutions de l'équation $f(x) = 0$ (voir *infra*).

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
f		↘	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0	↗	

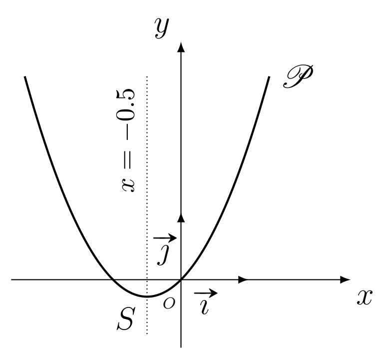
   - Forme canonique de $f(x)$. $x^2 + x = 1\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$.
   - Résolution de l'équation $f(x) = 0$. C'est $x^2 + x$, forme développée de $f(x)$, qui est la forme la plus adaptée pour la résoudre.

$$\begin{aligned} x^2 + x &= 0 \\ x(x+1) &= 0 \\ x = 0 \quad &\text{ou} \quad x = -1 \end{aligned}$$

   L'ensemble des solutions de $f(x) = 0$ est donc $\mathscr{S} = \{0\,;-1\}$.
   - Signe de $f(x)$ en fonction de x. D'après le tableau de variations de f (complété), on a

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f		$+$	0	$-$	0	$+$	

   - Le sommet de la parabole $\mathscr{P}$ représentant f est le point $S\left(-\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{4}\right)$. Son axe de symétrie est la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.



2. $\boxed{f\ : x \mapsto -x^2+3x-2}$

— $a=-1$, $b=3$ et $c=-2$. $\Delta = 3^2-4\times(-1)\times(-2)=1$, $-\frac{b}{2a}=-\frac{3}{-2}=\frac{3}{2}$.

— Sens de variation de f. $-1<0$. Donc f est strictement croissante dans $\left]-\infty\,;\frac{3}{2}\right]$ et strictement décroissante dans $\left[\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

— Extremum de f. f admet un maximum égal à $-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{1}{-4}=\frac{1}{4}$, atteint en $\frac{3}{2}$.

— Tableau de variations de f, complété avec les solutions de l'équation $f(x)=0$ (voir *infra*).

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
f		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	

— Forme canonique de $f(x)$.

$$\begin{aligned}
-x^2+3x-2 &= -(x^2-3x+2)\\
&= -\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2\right)\\
&= -\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right)
\end{aligned}$$

— Résolution de l'équation $f(x)=0$. C'est $-\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right)$, forme canonique de $f(x)$, qui est la forme la plus adaptée pour la résoudre.

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right)\\
&= -\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\\
&= -\left(x-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\\
&= -(x-2)(x-1)
\end{aligned}$$

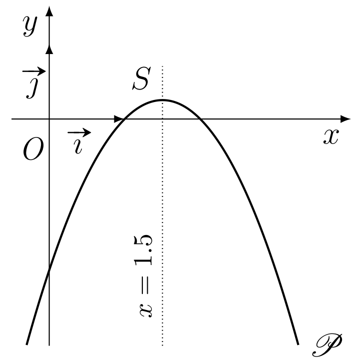
Donc
$$\begin{aligned}
f(x) &= 0\\
-(x-1)(x-2) &= 0\\
(x-1)(x-2) &= 0\\
x-1=0 \quad &\text{ou} \quad x-2=0\\
x=1 \quad &\text{ou} \quad x=2
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de $f(x)=0$ est donc $\mathscr{S}=\{1\,;2\}$.

— Signe de $f(x)$ en fonction de x. D'après le tableau de variations de f (complété), on a

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f		$-$	0	$+$	0	$-$	

Le sommet de la parabole $\mathscr{P}$ représentant f est le point $S\left(\frac{3}{2}\,;\frac{1}{4}\right)$. Son axe de symétrie est la droite d'équation $x=\frac{3}{2}$.



y
$\vec{j}$
S
O
$\vec{i}$
x
$x = 1.5$
$\mathscr{P}$